Digitized by Google

FONDO PIZZOFALCONE

REALE OFFICIO TOPOGR...

12030
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio I
Palchetto 3
Num.° d' ordine 60

12-11-19

NAZIONALE
B. Prov.
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
2773
NAPOLI

B. Prov.
I
2773

9. 2

Digitized by Google

Digitized by Google

GEOMETRIA DI SITO

SUL PIANO, E NELLO SPAZIO

BIBLIOTECA PROVINC. NAPOLI

Digitized by Google

SBN
C09005

GEOMETRIA

DI SITO

SUL PIANO, E NELLO SPAZIO

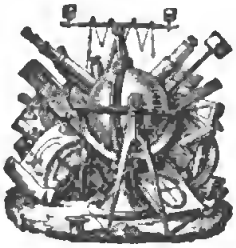
DEL

CAV. V. FLAUTI

Professore di Analisi sublime nella R. Università degli studj di Napoli, e membro della *giunta* di pubblica istruzione pel Regno — Segretario della R. Accademia delle scienze, socio ordinario del R. Istituto d' Incoraggiamento, e della *Pontaniana*; onorario delle Accademie di Berlino, Copenaghen, *ec. ec.*

TERZA EDIZIONE

riveduta dall' autore.



BIBLIOTECA PROVINCIALE di NAPOLI

BIBLIOTECA PROVINCIALE DI NAPOLI

IN NAPOLI
Nella stamperia privata dell' autore
1842.

B. 15

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

PREFAZIONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE DI NAPOLI

Finiva il passato secolo, quando un illustre matematico francese, chiamato a far parte di una scuola per professori, eretta in Parigi, ed affidata a' primi uomini di quella nazione [1], raccogliendo i principj di scienza geometrica fondamentali per le arti di costruzione, e per la civile, e militare architettura principalmente, diede ad essi ordine elementare, e ne formò il soggetto di sue lezioni, dichiarando così un nuovo ramo di scienza geometrica, che prima, senza alcuna forma convenevole, apprendevasi nelle scuole di Mezieres in Francia, ed in quelle di Neustat in bass' Austria [2].

---

[1] *Écoles normales* — Fa veramente onore a noi, che ora andiamo sempre in traccia d' improntar da altri regole, e metodi d' istruzione, il vedere, che il regolamento compilato per le nostre scuole elementarissime in quel modo denominate, fosse stato ristampato nella raccolta de' volumi intitolati: *Seanças dee Écoles normales, ec.*, pubblicati per quella sublimissima istituzione di novella scuola in Parigi, che durò appena i quattro primi mesi del 1795.

[2] Dal fu mio collega nella R. A. delle scienze, *Carmine Lippi*, la cui infelicissima fine cagionata da gravi dispiaceri, o torti recatigli da persona gelosa del suo merito, ed assai impare a lui, ricordo sempre con estremo dolore, mi fu mostrato un suo MSS. raccolto in questa scuola, ove vedevansi le principali costruzioni della così detta *Geometria descrittiva*.

Capitatami alle mani, all'incirca il 1801, quest'opera dell' illustre *Monge*, da lui intitolata *Géométrie Descriptive*, ed avendola attentamente considerata, parvemi che maggior chiarezza elementare vi si potesse indurre, e che talune soluzioni più complicate potessero in alcun modo simplificarsi; e messomi al lavoro, con avidità giovanile, in breve tempo compilai, sul piano stesso del *Monge*, i miei *Elementi di Geometria descrittiva*.

Fondavasi allora in Napoli nel Castelnuovo una scuola di giovani militari per corpi facoltativi, e questi miei *Elementi* vi furono adottati, essendone stato affidato l' insegnamento ad un mio già collega di scuola, ed ora nella carriera di professore.

Così stette la cosa fino al 1806, quando, riformata l'Università degli studj di Napoli, si volle dal dotto ministro dell' interno *Miot*, che io oltre l' *Analisi de' finiti* insegnassi anche la *Geometria descrittiva*, e mi s' ingiunse di pubblicarne gli *Elementi*, che furono a spese del governo stampati in Roma nel 1807; ed erano la prima istituzione in tal genere che vedesse l' Italia, che però ben l' accolse, e cominciai così a proccurarmi la buona corrispondenza di valentissimi matematici italiani, e tra essi il *Pessuti*, e 'l *Paoli*, da' quali mi furono scritte lettere ben soddisfacenti per un giovane professore, che da me poi si pubblicarono, a consiglio di un amico, in una di quelle circostanze prodotte da bassa gelosia di persone senza merito, che

spesso hanno amareggiata la mia unica, faticosa, e libera carriera [3].

Contemporaneamente al *Monge* era concorso allo stesso scopo il suo collega, e laborioso analista *Lacroix*, che nella qualità di *professore aggiunto* alle suddette *Scuole normali*, per la *Geometria descrittiva*, aveva dovuto pure occuparsene; e questi pubblicava ancor egli nel 1795 un libro elementare di tale scienza, intitolandolo *Géométrie sur les plans, et les surfaces courbes*, non sembrandogli abbastanza proprio a definir l'oggetto di essa quello adottato dal *Monge*, che poi ha conservato, forse per la brevità, o per altra ragione più propria alle circostanze, ed a'tempi, che alla scienza. Ed in vero se vuolsi, che il titolo di un libro indichi in qualche modo la materia, che vi si tratta, quale idea potrà formarsi anche un geometra al sen-

[3] In questa circostanza, per rendere uniforme l'insegnamento nella mia cattedra, senza diparlirmi da quello, che mi era imposto, composi, e dettai per ben due volte, prima del 1806, alla quale epoca passai a sostener l'altra cattedra di *Analisi sublime*, il *Saggio di Geometria analitica di Sito*, di cui ho parlato nell' indrizzo a Fergola innanzi le due precedenti edizioni del presente mio trattato. E di quel MS. debbono esisterne copie in mano di più valorosi allievi, che allora seguirono le mie lezioni; mentre avendone io dispersi fin d'allora alcuni cartolai, mi è stato ciò di remora a pubblicarlo. Esso però, ora che ho intrapreso a dar fuori tutto quel materiale, che per la compiuta istituzione ne' metodi in Matematica ha servito in nostra scuola, vi avrà il suo luogo, sia da me rifatto, sia (come meglio desidererei, per le tante altre mie occupazioni, anche per la stampa delle opere annunziate nel *Prospetto*) da taluno di que' distinti professori, che già furono miei allievi, è de' quali mi compiaccio averli ora per compagni, per la loro buona morale, più ancora, che per la scienza.

tirsi annunziare *Geometria descrittiva* , quando non sia preventivamente informato dell' oggetto di essa ? Nè tampoco parmi corrispondere interamente a siffatto scopo quello escogitato dal *Lacroix* ; poichè se delle cose geometriche si può considerare il sito , la grandezza, il rapporto, e la figura , rimarrà sempre dubbioso, ed indeterminato di quali cose imprendasi in esso a trattare . Queste ragioni m'indussero nel 1815 , allorchè pubblicai la prima volta il trattato che ora ristampo , ad intitolarlo *Geometria di sito sul piano, e nello spazio.*

Ma non è il cambiamento d' intitolazione , che distingue questo libro dalle opere sopraddette , e dalle altre, che fino a quell'epoca le avevano seguite ; sì bene le cose che vi si trattano , e la maniera come vi sono ordinate, ed esposte, di cui credo conveniente accennare a parte a parte un qualche poco.

La *Geometria descrittiva* avendo per oggetto la determinazione del sito delle cose geometriche nello spazio, per mezzo de' loro convenevoli determinanti su piani dati, chi non vede, che il rigor geometrico, e l'esattezza elementare esige di prima ben dichiarare quest' idea astrattissima di *sito*, e che si stabilisse ancora il modo da fissare i convenevoli determinanti di esso. Senza questa preventiva cognizione , i problemi di *Geometria descrittiva* rimarrebbero sempre imperfettamente risoluti , ed insuscettivi di una comoda, ed elegante costruzione. A tale oggetto veggonsi nel *cap. I* della presente o-

pera recate le definizioni, ed i principii fondamentali del *sito*, e della maniera di stabilirlo convenevolmente; e nel *II* si tratta de' *determinanti* di esso pe' punti, e le linee nel piano: le quali cose, sebbene si vedessero esposte da *Euclide* nel libro de' *Dati*, e che il fossero, con una qualche maggior precisione, nel trattato *dell' Invenzione geometrica*, di cui se ne sta anche adesso stampando la parte I., pure ho creduto, per ragion di metodo, doverle quì riportare; rimettendo poi interamente a quell' egregio lavoro del *Fergola*, ed unico nel suo genere, per tutte le altre conoscenze di *dati*, che con quelli di *sito* sono correlativi, e che talvolta occorrono alla loro piena determinazione, delle quali cose, nelle precedenti edizioni del presente trattato, mi era veduto in obbligo di accennarne qualche cosa nell' introduzione.

Dopo ciò ho intrapreso a trattare in due altri capitoli *III*, e *IV* *i dati di sito nello spazio*, esponendo nel primo di questi *i determinanti del sito de' punti, delle linee rette, e degli angoli piani nello spazio*; e nel secondo *quelli de' punti, delle linee curve, e degli angoli solidi*: le quali ricerche trovansi esposte in tanti *teoremi di dati*, aggiugnendo per tal modo all' antica Geometria quel compimento, che vi si desiderava pe' dati di sito nello spazio, che dovettero esser da que' nostri maestri sicuramente considerati; e forse dovè *Eu-*

clide occuparsene ne' suoi due libri de' *Luoghi alla superficie*, o il furono in altre opere di altri geometri, che il tempo ci ha involate. Per un' applicazione di queste teoriche, ho poi raccolti nel cap. *V*. alcuni problemi fondamentali per la scienza che trattasi.

Un parallelo tra questa parte del mio lavoro, e gli altri trattati dello stesso argomento, potrà farsi a colpo d' occhio, solamente osservando, che le proposizioni di questi tre capitoli *III*, *IV*, *V* con nesse tra loro, e tutte essenziali alla scienza, anche elementarmente considerata, sono di gran lunga maggiori in numero delle recate in quelli; a che dovrà aggiugnersi la generalità con la quale le ricerche, che li concernono, vi sono esposte, da renderle proprie ad un argomento geometrico, mentre nulla vi è detratto per la facilità di esecuzione, nell' applicarle alle arti del disegno. Di che potrà ciascuno assicurarsi col semplicemente trasmutare in problemi, e pel caso più semplice de' piani ortogonali, i teoremi di *dati* de' cap. *III*, e *IV*, rilevandone per ciascuno la soluzione dall' analisi recata per la dimostrazione del corrispondente teorema, convenevolmente modificandola. E questo facile esercizio servirà anche a dilucidare a' giovani la natura di quelle ricerche, da poterle indistintamente presentare come teoremi, e come problemi; e contribuirà pure, or che nel presente trattato ho separata la parte elementare da quel-

la di complemento, per condiscendere alle ragionevoli premure de'poc' anzi detti professori, a renderlo più adatto a valersene per una facile, e comoda istituzione elementare della gioventù nella *Geometria descrittiva.*

Debbo pure avvertire, che dopo la mia prima pubblicazione della *Geometria di sito*, essendosi le istituzioni prodotte altrove nella *Geometria descrittiva* conformate, nella maniera per questa propria, in estendere il numero de' problemi di sito, che riguardavano gli argomenti trattati ne' tre capitoli suddetti, vi si veggono però in alcune recate fuor di proposito ricerche di pura grandezza, o specie, che al presente argomento non si appartengono. Tali sono, per un esempio, quelle intorno all'angolo solido triedro, da me, per questa ragione le altre volte riportate, come ancor ora riporterò, nelle note in fine, a solo oggetto di compiere geometricamente quest' argomento, che per le vie trigonometriche trovasi anche trattato nella mia *Trigonometria* [4].

Esposta la teorica de' determinanti del sito degli oggetti geometrici più semplici nello spazio, ch'è il fondamento delle ricerche seguenti, trattasi nel capitolo *VI* lo stesso argomento per le superficie curve, e della loro genesi, che vedesi ora in nuova guisa più generalmente considerata [5], ed in mo-

---

[4] *Corso geometrico vol. IV.*

[5] Intendesi di una considerazione reale, e che prestisi a geometriche ricerche, o all' adattamento dell' analisi algebrica, a che certamente

do assai atto alle ricerche importanti su di esse, sia per le vie geometriche, sia per quelle del calcolo algebrico, come più accomoda, e piace a' moderni. Per tal modo la dottrina de' siti delle superficie curva è venuta anche a conseguire quell'unità, e quel nesso, che gli era proprio. Mi ho così anche aperta la strada ad una nuova, e più convenevole genesi delle superficie curve di second'ordine, per le quali ho esposte le principali affezioni, ed ho risoluti i principali problemi, che le riguardano nel presente argomento, nella parte II. di complemento di questo trattato; ove le ricerche intorno ad es-

---

non corrisponde quella d'immaginare, che ogni curva arbitrariamente segnata da un piano segante in una superficie curva ne diventi la generatrice, prendendo per legge del movimento di essa l'appoggiarsi costantemente su tre altre curve pur arbitrariamente segnate sulla superficie stessa. Un tal concetto, che manca della dovuta precisione, per diventar geometrico da costituire la generalissima genesi delle superficie curve, non prestasi affatto a far comprendere la forma di tali superficie, quando abbiano una genesi regolare, e già conosciuta; e quindi lungi dall' essere di vantaggio alla scienza geometrica, la rendo di un' astrazione chimerica. E per addurne un qualche esempio, nel caso semplicissimo della superficie conica ordinaria, quale imbarazzo non apporterebbe nella genesi di questa, volendosene prendere per generatrice un' iperbole in essa segnata; e quale vantaggio per ciò se ne otterrebbe, per le considerazioni geometriche, o geometrico-algebriche su di essa? Non lavoriamo dunque in modo da far perdere alla scienza quel suo orizzonte, che dee servirle a renderla possibile, e però facile e rigorosa, che ciò non tenderà a migliorarla; ma anzi a renderla misteriosa, e *paradossale*: ed avvezzando la gioventù, a poco a poco, come sta avvenendo, a concedere talune cose, ch' essa, per la troppa astrazione delle medesime, non arriva a comprendere, deviarla da quel rigore, ed esattezza, che è propria della Geometria, ed utile agli usi, ed alle applicazioni di questa.

se mentre vi si vedranno esibite geometricamente, e però con quell' evidenza, e facilità di concepimento, che in questo solo modo poteva ottenersi, apporteranno alla Geometria degli antichi il vantaggio di addirle un argomento, che finora le era interamente sfuggito; e la cui prima conoscenza è dovuto all'Analisi moderna.

Or dopo le generali considerazioni di sito per le superficie curve in generale esibite nel presente capitolo, ho voluto nel seguente, il *VII*, recare specialmente la *costruzione* così detta delle superficie cilindriche, coniche, e di rivoluzione costante; poichè l' uso più frequente di essa esigeva, che evidentemente si avesse la riduzione di tal problema generale pe' casi, che le concernevano.

Da queste generali considerazioni sulle superficie curve passando alle particolari per esse, ho trattato de' loro piani tangenti, ripartendo questo assunto ne' cap. *VIII*, e *IX*; nel primo de'quali, oltre le definizioni per esso, vi è recato quanto concerne le superficie *cilindriche*, e *coniche*, e nell' altro ciò ch' è relativo alle superficie di *rivoluzione costante* in generale, e specialmente le sferiche. A che veggonsi questa volta anche aggiunti due problemi pel contatto di un piano con una superficie cilindrica, o conica, ed un'altra sferica; ed incidentemente pel caso loro più regolare, cioè quello che la superficie cilindrica, o conica fosse la considerata negli Elementi, onde render pienamente geo-

metrica la costruzione di essi, vi si vede recata una nuova soluzione del problema di tirare le tangente comune a due ellissi date di grandezza, e di sito, e che a due curve coniche qualunque può, con facilità estendersi. E passandosi al caso più generale, con sostituire alla superficie sferica una qualunque di rivoluzione costante, vi si vede, per incidenza, esibita in due lemmi, la determinazione della curva di contatto di una superficie cilindrica, o conica data di sito, con una superficie di rivoluzione del pari data. Il tipo della qual ricerca è preso dall' elaboratissimo trattato dell' egregio professore Bruno, *sulle ombre ne' disegni*, da me ben due volte invano annunziato per la stampa; ma che spero sia questa volta ciò fatto con migliori auspicj, e più sicuro successo. Finalmente in altro lemma vi è risoluto il problema del la superficie cilindrica, o conica involgente due superficie sferiche date di sito, sul quale vedesi poi fondata la soluzione di quello del piano tangente le stesse superficie sferiche, ed una di rivoluzione costante, con l' asse verticale. Ed altre ricerche analoghe avrei potuto ancor aggiugnere, se non mi fossi già troppo dilungato in esse, nella parte elementare di questo trattato; che però serberolle per l' altra di complemento del medesimo, o ancora per gli *Opuscoli matematici*, ove quelle mi sembrassero soprabbondanti, e troppo estese.

Ed al proposito della materia trattata in questi due capitoli mi convien notare, che l'illustre *Monge*

fondò la natura, e quindi la definizione de' piani tangenti, nel dover passare per le tangenti di due generatrici differenti di una superficie in uno stesso punto di essa, assumendo così come un postulato, che le tangenti a tutte le altre sezioni prodotte nella stessa snperficie, per quel punto, dovessero necessariamente ritrovarsi in quel piano, o, che vale lo stesso, che segandosi una superficie curva con quanti piani si vogliano passanti per un medesimo punto di essa, le tangenti in questo condotte a ciascuna sezione debbano giacere in un medesimo piano[6]; e lo stesso principio erasi pur assunto dal *Lacroix*[7], e da altri. L'*Hachette* ad evitare quest' arbitraria assunzione aveva ripiegato nell'altra più impropria di considerare il piano tangente come un prolnngamento per ogni verso dell'elemento della superficie, che corrisponde al punto del contatto[8]. Nè tampoco erasi da me evitato quel primo inconveniente, con la definizione, che ne recai altra volta nella mia *Geometria di Sito*, posteriormente adottata in altre istituzioni di *Geometria descrittiva*, snpplendovisi da alcuno la dimostrazione della coincidenza, nel piano condotto per le tangenti di due generatrici, delle tangenti a tutte le altre sezioni prodotte nella superficie curva da piani passanti pel punto medesimo; ma in-

---

[6] *Géométrie descriptive* 11. n. 23.
[7] *Complément des Elemens de Géométrie — Des plans tangens ...*
[8] *Supplément a la* Géométrie descriptive de Monge §. 24.

vero in tal modo, che a me non è sembrato molto concludente, o al meno non chiaro abbastanza, quantunque tale il giudicasse l' autore di esso. Or a ciò parmi essersi con facilità ovviato, con la definizione de'piani tangenti da me data questa volta, desumendola dalla stessa chiara nozione, ch' ebbero gli antichi pel contatto delle linee tra loro; e da tal definizione le ricerche su' piani tangenti le superficie curve definite si veggono facilmente, e con estrema chiarezza risultare.

Siccome dalla definizione de' piani tangenti era disceso ancora a quella de' contatti delle superficie curve tra loro, ond' essa non mancasse nelle circostanze occorrenti, così ho voluto mostrarne ancor qualche esempio [9], recando nel cap. *X* la costruzione grafica di due principali problemi de'contatti sferici; serbando la compiuta trattazione geometrica di quest' argomento, e dell' altro affine de' contatti circolari pel vol. III. degli *Opuscoli matematici*, come vedesi annunziato nel *Prospetto* di loro pubblicazione.

E quì al proposito accenneremo, che lo scopo cui miriamo con la pubblicazione de'presenti trattati, e degli *Opuscoli*, non è di dare un materiale staccato, e da rimanere senza un uso, anche elementare, sì bene da costituire un insieme di precetti,

[9] Per incidenza alcun altro ne offrivano i lemmi già indicati del capitolo precedente.

e di esempj per risolver problemi geometrici, con ogni metodo, sia antico, sia moderno; in somma, come mi sono espresso, in fine della prefazione all' altro trattato dell' *Invenzione geometrica*, di costituire un nuovo *Luogo di Risoluzione* pe' moderni novelli geometri, del pari che avevan fatto gli antichi per le loro scuole.

Le ricerche sulle intersezioni delle superficie curve, ubertosa, ed importante materia, non solo per le arti di costruzione, ma anche per la Geometria, per risolvere que' problemi, che hanno bisogno de' *luoghi alla superficie*, seguendo immediatamente quelle de' contatti di esse, che ne formano un caso particolare, sono passato però a trattarle ne' capitoli *XI*, *XII*, *XIII*, ripartendole nel seguente modo. Nel primo di essi ho considerato l' incontro di una retta di sito con una superficie cilindrica, conica, o di rivoluzione costante, il quale argomento elementare non doveva esser trascurato in una scientifica istituzione di Geometria di sito; non solamente perchè occorre in altre costruzioni della medesima, ma ancora perchè, come vedrassi in appresso, da esso traggonsi immediatamente talune soluzioni di problemi nello spazio. Dopo ciò, procedendo con ordine, ho considerata, nel capitolo seguente, l' intersezione de' piani con le superficie curve, al qual proposito ho, in alcuni teoremi preliminari, stabilita una dottrina elementare relativa a siffatte intersezioni, ed alle curve,

che da esse risultano, da poter anche utilmente servire in altre ricerche geometriche . Finalmente il capitolo *XIII* è destinato a risolvere i problemi dell' intersezione delle superficie cilindriche, coniche, e di rivoluzione costante tra loro.

Le ricerche precedenti, su le intersezioni delle superficie curve, dando immediatamente luogo alle linee curve da esse risultanti , in generale a *doppia curvatura* , poichè partecipanti di quelle delle due superficie intersegantisi , ho nel capitolo seguente (il *XIV*) recate le poche considerazioni preliminari a tali linee curve , che per esse occorrevano nella parte elementare del presente trattato .

Per illustrar con esempj l' uso de' *luoghi alla superficie* , nella soluzione de' problemi nello spazio , ne ho recati diversi nel capitolo *XV* , col mezzo di quelli risolvendoli ; tra' quali veggonsi compresi i due per l' esibizione di un punto nello spazio , date le distanze da tre punti dati, o da tre rette di sito , che compiono la determinazione del sito di un punto nello spazio, e dimostrano la ragione per la quale siesi data la preferenza al modo di riferirlo a piani di sito (*pr.* 13. *del pres. trattato*). Inoltre i principali problemi sulla piramide triangolare , e tra essi quello di esibirla essendone dati i lati della base , e gli angoli al vertice , che tanta diversità di opinioni aveva presentata sulla sua natura, ed i mezzi da costruirlo a' diversi sommi geometri , ed analisti , che l' avevan trattato ; ma che

alla fine è stato ridotto in forma generalissima, e con assai eleganza geometrica risoluto dal nostro professore Bruno [10]; da che mi sono indotto a trattarne l' argomento per intero, nel volume V degli *Opuscoli matematici*, come fu annunziato nel *Prospetto per essi*.

Tra queste ricerche vedesi per incidenza assegnata l' intersezione determinata di tre superficie sferiche, e vi si rilevano due importanti verità geometriche, per le intersezioni de' cerchi, e delle sfere.

Al proposito del soggetto di questo capitolo, il rispetto, che debbo alla memoria dell' illustre, e laborioso matematico francese *Hachette*, il quale onorommi di sua utile corrispondenza mentre visse, mi obbliga a digredire alquanto dalla presente esposizione del mio lavoro, per distrugger nell' animo di molti tra' moderni l'erronea idea, che: *Le proprietà dell' estensione, considerate nelle tre dimensioni, furon poco conosciute dagli antichi geometri* [11]. E ciò mentre illustrerà un punto di storia delle Matematiche affatto non considerato finora, spargerà ancora qualche luce su questo importante argomento del *Luogo risoluto*.

Ma prima di entrare in materia convien, che si riduca in forma più propria l' espressione vaga di sopra recata; poichè l' *estensione* così generalmente presa, come ivi enunciasi, non ha altra proprie-

[10] Vedi *Atti della R. A. delle Scienze* di Napoli vol. II.

[11] Supp. 2. alla *Géométrie déscriptive* del Monge, an. 1818.

tà , che la sola delle *tre dimensioni*; il che renderebbe quella proposizione un puro gergo di parole, se per essa non intendessimo, che : *i problemi nelle tre dimensioni, ed i mezzi per costruirli, e quindi i luoghi per essi non furono gran fatto conosciuti , e trattati dagli antichi .*

E prendendo da prima a discutere tal proposizione nel senso della pura Geometria , osservisi , che ne' primi tempi di essa non essendosi rinvenuta la maniera meccanica da descrivere le curve coniche nel piano , la composizione de' problemi in cui abbisognavano, ottenevasi con un'acconcia combinazione di superficie coniche , nelle quali le locali per la costruzione di un problema eransi convenevolmente rappresentate, per la sezione con un piano ; d' onde a' problemi così costruiti , della natura di quelli , che or diciamo di *terzo* , *e quarto grado* , caratterizzandoli dalla loro equazione , fu dato il nome di *solidi* [12] . E per questa combinazione di superficie coniche , nel modo atto ad ottenere la costruzione di un problema, molte considerazioni dovettero occorrere , che furono in seguito trascurate, e dimenticate, subito che la Geometria non ebbe più tal bisogno, ottenuto il modo da rappresentar quelle curve nel piano , come or noi facciamo. Nè di quelle loro ricerche essi

[12] *Solida appellantur , namque ad constructionem necesse est solidarum figurarum superficiebus , nimirum conicis uti* — Pappo *Collect. Math.* dopo la prop. 4. lib.III. E lo stesso ripete dopo la prop.30. III.

curaron tramandarci notizia, forse ancora perchè riputando meccaniche siffatte costruzioni, nella Geometria ricusavano riceverle [13].

Ma le considerazioni degli antichi intorno alla risoluzione de' problemi, non si arrestarono a' sopraddetti, dove par che siensi soffermati i metodi analitici de' moderni: essi progredirono ben oltre ne' *lineari*, che or diremmo *trascendenti*, pe' quali inventarono nuove curve, alcune descritte nel piano, ed altre ne' solidi, o sia nelle superficie curve, talchè l' *elice*, che appariva descritta nella superficie di un cilindro retto, la *spirale sferica* su quella di una mezza sfera, *ec.* E di esse si valsero ancora talvolta in risolvere i problemi del secondo genere, trovandosi adoperata da Archita una curva descritta sulla superficie di un cilindro retto, per risolvere il famoso problema delle due medie proporzionali: la qual soluzione, ch' è l' unico esempio, che ci rimane in tal genere, dall' antica Geometria, tramandatoci, non senza oscurità, da *Vitruvio* [14], ci assicura della loro scienza sul proposito delle intersezioni delle superficie curve, e de' luoghi ad esse, fin da quelli antichissimi tempi considerati. Oltre a ciò, che altro mai erano que' due

---

[13] *Antiqui geometrae problema antedictum in duabus rectis lineis, geometrica ratione innixi construere non potuerunt, quoniam neque coni sectiones facile est in plano designare* (Pappo nel luogo di sopra citato).

[14] Quest' ingegnosa soluzione, che non ostante le molte elegantissime de' geometri posteriori, sì antichi, che moderni, non merita di essere affatto dimenticata, verrà riportata in questo capitolo.

tanto desiderati libri di Euclide de' *luoghi alla superficie*, e quale il loro uso? se per essi non vogliamo intendere, che esponevanvisi tante proprietà locali delle superficie, appunto come pe' *luoghi piani* quelle di linee rette, e circolari, e pe' *luoghi solidi* le altre delle curve coniche; e che il loro uso consisteva nel valersene, con la combinazione fatta in convenevol modo, per la soluzione de' problemi nello spazio, appunto come de' *luoghi piani*, e *solidi* pe' problemi nel piano.

E può mai immaginarsi, che geometri sì acuti, e perspicaci, come furono gli antichi, non avessero mai veduto, e mai fosse loro entrato in pensiero, che la superficie sferica fosse il luogo di tutt' i pnnti equidistanti da un dato punto di sito nelle tre dimensioni, mentre avevan ciò analogamente stabilito pel cerchio nel piano. Similmente, che non avessero considerata la superficie cilindrica come il luogo de' punti equidistanti da una retta di sito, e la conica come quello de' piani, che inclinavansi in uno stesso angolo a quello della base di essa: verità tutte intuitive. E se ciò non è supponibile, certamente, che il loro spirito di ricerca non arrestossi a queste elementarissime considerazioni; ma che prendendo quindi le mosse si spingessero tant' oltre, quanto da' loro metodi era permesso, da aver potuto Euclide compiere due interi libri di una dottrina, che noi invano desideriamo, ed alla quale non abbiamo, che porre al confronto.

Ma anche progredendo più oltre, senza dipartirci però da quelle più ovvie nozioni di loro scienza serbateci da *Pappo*, ci fa certi di questo loro studio sulle superficie curve, come luoghi geometrici per risolver problemi nello spazio, la stessa loro triplice distinzione de' *luoghi* in *efettici*, cioè, quelli ch'eran *luoghi* di loro medesimi, sicchè ad esibirli non fosse bisogno di determinanti estrinseci; in *diadossici*, quando ciascuno l' era di una dimensione di più della cosa, che gli apparteneva, come la circonferenza del cerchio de' punti equidistanti da un dato, il perimetro dell' ellisse, o dell' iperbole pe' punti, che serbassero da due dati distanze date nella somma, o nella differenza, *ec.*; in *anastrofici*, se eccedessero per due gradi, o due dimensioni, come la superficie sferica pe' punti equidistanti da un dato nello spazio, quella della sferoide, o del conoide iperbolico pe' punti, che serbassero da due dati distanze date nella somma, o nella differenza, *ec.* Imperocchè altrimenti di questi *luoghi* affatto avrebbero potuto far menzione.

Sicchè da quelle poche notizie, che rimangono della tanta loro scienza geometrica, per questo riguardo, raccogliamo una duplice distinzione, ch'essi fecero de' *luoghi*; la prima relativamente alla loro natura, o grado, da che rimanevano ancora distinti, e caratterizzati i problemi in *piani*, *solidi*, e *lineari*; la seconda relativa alla qualità loro, ed al grado d'indeterminazione; ed era in *luoghi alla*

linea, alla *superficie*, ed al *solido*. E questi potevano appartenersi a ciascun genere de' precedenti.

Dopo aver recati gli argomenti più ovvj, che dimostrano aver dovuto gli antichi geometri coltivare e promuovere le ricerche delle proprietà delle superficie curve, e la combinazione di esse, più di quello ancora, che non siesi fatto da' moderni, altri ne offre *Pappo* medesimo, nelle sue *Collezioni Matematiche*, dalle quali sole, imperfette, e mutilate come ci sono pervenute, possiamo raccogliere alcune notizie della tanta scienza a noi ignota di que'nostri maestri. Ed egli, di fatti, dopo aver parlato della distinzione de' problemi tante volte ripetuta, così ripiglia, in ordine a quelli del terzo genere, *quod lineare appellatur; lineae jam aliae, praeter jam dictas in constructionem assumuntur, quae varium et difficilem ortum habent, ex inordinatis superficiebus, et motibus implicatis factae. Ejusmodi vero sunt etiam lineae, quae in locis ad superficiem dictis inveniuntur, ec.* [15] Da che raccogliesi ad evidenza, ch' essi non poche superficie considerarono descritte in modo vago, ed irregolare, delle quali a noi non è giunta notizia alcuna; e che su di esse descrissero con data legge linee curve, per valersene in risolver problemi, che non potevano appartenersi se non alle tre dimensioni. E quivi di nuovo evidentemente si parla de' luoghi alla

[15] *Coll. Math.* dopo la prop. 30. lib. IV.

superficie: soggiugnendovi poco dopo, che intorno a tal materia, ed alle intersezioni delle curve descritte sulle superficie, o nascenti dalle loro intersezioni, un lungo trattato aveva composto un tal *Demetrio Alessandrino*, geometra non degli ultimi certamente, ma che intanto appena n'è a noi giunto il nome, da questo luogo di *Pappo*. Lo stesso per l'altro *Filone Tianeo*, che, trattando un simile argomento, considerò molte curve, *quae multa et admirabilia simptomata continent*, le quali furono tenute in gran conto da' geometri posteriori, e somministraron loro materia di lunghe trattazioni; di tal che *Menelao* scrisse un libro su di una sola di esse, che prese il nome, per le sue speciose proprietà, di *admirabilis Menelai*.

Abbondante materia ci prepararon dunque gli antichi, ed assai utile alla composizione di difficili problemi in ogni genere, sulle linee curve, e le superficie, e le intersezioni di esse, trattandola con que' metodi, che possedevano. Non v' ha dubbio, che l' attività, e la facilità di maneggio, che ci offrono i nostri metodi, varrebbero a renderci per questa parte ad essi di molto superiori, se però, per le ricerche sulle linee curve, non ci fossimo arrestati alla semplice classificazione di quelle del *terzo*, e del *quart' ordine*, ed appena su di esse fatte considerazioni generali, senza per nulla incaricarci di trattarne alcuna in particolare, a fin di riconoscerne qualche proprietà, che potesse costituirne un

luogo geometrico, per la soluzione di qualche difficile problema superiore al quarto grado. Ed appena ravvisiamo tra quelle del *terzo grado* la *cissoide*, e la *concoide* tra le altre *del quarto*, perchè fatteci conoscere dagli antichi. Che se in tale esercizio si fossero versati, o che in appresso ne faranno la loro occupazione i moderni analisti, riescirà forse ad essi agevole lo stabilire una qualche regola di costruzione geometrica pe' problemi superiori al quarto grado, il quale argomento dopo il Cartesio vedesi, con gran danno della Geometria analitica, interamente dimenticato. E lo stesso andamento dovrebbe ancor tenersi per le superficie curve, e per le curve a doppia cnrvatura, delle quali appena vedesi usata, in qualche problema, la *spirale cilindrica* tramandataci dagli antichi.

Si è ciò accennato, per ispingere i coltivatori de' moderni metodi ad assumere quest' incarico, che riescirà ad essi di lode, e di utilità grandissima alla scienza. E senza contender vanamente di prevalenza degli antichi, e de' loro metodi su' nostri, o di questi a quelli, avendo, quelli, e noi fatti tutti gli sforzi per promuoverla, cerchiamo prevalerci di tutt' i mezzi, ch' essa ha, per sempre più perfezionarla. Il vasto campo delle Matematiche oggigiorno, rende già abbastanza difficile, per non dire impossibile, il percorrerle tutte, per non volerle ancor imbrogliare con inutili quistioni, e vane polemiche, le quali ordinariamente sono fatte per nascondere quel-

l' ignoranza, che si ha in taluna parte di esse, che qualuuque siesi, o greca, o moderna, è sempre degna della più profonda meditazione. Certamente, che nel modo come taluni si stanno adoperando, soffrendone a poco a poco la rigorosa istituzione geometrica, noi ci chiuderemo alle spalle, con una porta di bronzo, le tante utili, e maravigliose escogitazioni degli antichi; sicchè quando convenga, o che rivenuti dal presente sviamento, vorrà ritornarsi indietro, riescirà assai difficile riaprirla.

Dopo il fin quì detto, non è vera ingiustizia de' moderni il negare agli antichi una più estesa conoscenza ne'problemi nello spazio, che noi non siamo giunti finora ad avere, e de'mezzi in più numero, e più geometrici per costruirli, sol perchè, le loro profonde opere in tal genere non ci sono pervenute, e per la poca pazienza, che si ha ancor ora di frugare studiosamente in quelle, che di essi ci rimangono?

Ma come mai di tutta questa loro estesa, e sublime scienza a noi nulla è pervenuto, mentre altre opere più elementari ne abbiamo? Questa stessa circostanza n' è la ragione. Gli antichi non ammettevano sì facilmente in loro scuola chiunque si presentava, come è il nostro costume; ma bisognava esservi trovato abile, e di una sicura riescita. Essi erano gelosi della loro scienza; e d' altronde ciò nasceva pure, da che non ne facevano mercato, nè la davano a prezzo, come ora costumasi.

Or se limitato era il numero di coloro, che venivano introdotti allo studio della parte elementare della Geometrìa, esso più ristringevasi, a proporzione, che più vi s' innoltravano, e che le materie rendevansi più astruse, e difficili. Adunque un maggior numero di copie si ebbero de'libri elementari di Euclide, di quelli di Archimede, ed ancor de' *Conici* di Apollonio, che di que' trattati che alla Geometria trascendente appartenendosi, da pochi erano studiati: il che anche comprovano gli stessi poc' anzi detti libri di Apollonio, de' quali con più facìltà a noi pervennero, e nella lingua lor propria, i primi quattro, che formavano parte della prima istituzione in Geometria sublime, che i rimanenti, de' quali a stento soli tre se n' ebbero finalmente nell' arabico idioma tradotti [16]. E lo stesso per altri libri del *Luogo* di *risoluzione*, de' quali pure i più elementari sono a noi pervenuti. E quando poi, con tutte le altre scienze, ancor le Matematiche cominciarono a decadere, l' è ben naturale, che restringendosi sempre la loro cultura, e l' istituzione, di que' libri più difficili, e che servivano ad una scienza più prolungata, e più sublime non si ebbe più conto, e caddero però in obblìo, e furono a mano a mano distrutti, mentre continuavasi a far uso de' libri elementari.

---

[16] Vedi la *Storia delle Sezioni coniche* premessa al vol. III. del nostro *Corso geometrico*.

Certamente, che se ancor ora, che tanto moltiplicansi con la stampa gli esemplari de' libri, all' illuminatissimo secolo in cui viviamo, succedesse altro d' ignoranza, e che guerre, devastamenti, dilapidazioni, ed altri fisici sconvolgimenti distruggessero le tante fatiche de' moderni, le prime a soffrirne sarebbero le opere più profonde, e difficili, delle quali già talune si costuma ora rispettarle, e citarle continuamente, senza più leggerle. Che maraviglia è dunque se non sienci pervenuti que' lavori degli antichi più difficili, de' quali se n' ebbe un ristrettissimo numero di copie, dopo tanti secoli di barbarie, e di foltissime tenebre, in cui si giacquero le scienze, non già neglette, ma interamente annullate. E di quelle nè pur la semplice notizia ce ne sarebbe pervenuta, nè di quegli uomini, che vi lavorarono, se per fortuna non ce ne avesse di alcuni conservata Pappo, senza che molti altri non fossero stati, de' quali nulla sappiamo.

A che aggiungasi, che se gli antichi non vollero da principio ricevere in Geometria i problemi *solidi*, avendo come meccaniche le loro costruzioni, quanto più non dovè ciò aver luogo pe' *lineari*, e nello spazio, i quali esigevano assolutamente implicanze di movimenti, e concetti, e descrizioni, che alla stretta, e rigorosa Geometria erano ripugnanti; ond' è, che mentre forse valevansene, per gli usi, non vollero tenerne conto scientificamente.

Agli argomenti geometrici finora presentati in

prova del presente assunto, giova aggiugnerne ancora un altro, che i più intenderanno facilmente; ed è la perfezione grandissima alla quale gli antichi portarono l' Architettura per ogni ramo di essa, e le arti ausiliarie della medesima; il che certamente non è possibile supporre, che si fosse ottenuto, senza un progetto preventivo delle opere, che ammiriamo tutt' ora si esattamente costruite, e senza il corrispondente disegno, il quale non potevano al certo eseguire, se privi fossero stati della Geometria delle projezioni, e della conoscenza, ed espertezza in risolvere problemi nella spazio, principalmente relativi ad intersezioni di superficie curve. Rendiamo dunque loro quella giustizia, che si conviene, se non vogliamo offendere noi medesimi, nel trovarci incapaci in eseguire, senza grandi stenti, ciò che vogliamo ad essi attribuire come fatto a caso, e con più arte che da noi.

E poichè mi trovo aver per un riguardo deviato dallo scopo di questo discorso preliminare, non sarà fuor di proposito rimuovere ancora un altro equivoco, nel quale è caduto il dotto storico delle Matematiche Montucla, credendo, che i luoghi alla superficie fossero le linee curve segnate su di esse, con date proprietà [17], che non erano se non il risultamento dell' intersezione di tali luoghi, da che quel problema indeterminato, il quale per mezzo di

[17] *Histoire des Mathématiques* vol. I. pag. 215. ediz. 2.

essi risolvevasi rimaneva ridotto per un grado, facendo così divenir *diadossici* que' luoghi, che da prima erano *anastrofici*. E se troviamo tali linee indipendentemente da ciò considerate, ed in altro modo descritte, mediante una qualche loro proprietà caratteristica, ciò dee attribuisi all' acume del loro ingegno in prepararsi per tal modo la riduzione delle locali de' problemi, simplificando, ed abbreviando le soluzioni di essi. Nè so intendere come quel geometra sì giudizioso, e sì versato nella lettura delle opere degli antichi, avesse potuto cadere in quest' equivoco, senza avvertire alla definizione di essi da noi di sopra recata, e senza nè men por mente, che vi eran punti, che appartenevansi per proprietà a tutta una superficie, come quelli equidistanti da un punto, o da una retta, e non già al cerchio, o ad altra curva in quella segnata.

Or ritornando, dalla ben lunga digressione, all' oggetto di questo discorso preliminare, chiudesi la parte elementare del presente trattato col capitolo *XVI* dello *sviluppo delle superficie curve*, recandovisi in tale argomento quant' era necessario, e che da principj geometrici poteva raccogliersi; mostrandone pure la convenevole applicazione ad alcuni problemi.

Nell' ordinar le dottrine di una tal parte, che costituisce la così detta *Geometria Descrittiva*, ho cercato conformarmi, per quanto permetteva la natura dell' argomento, allo stretto sistema geometri-

co, rendendovi le materie, e le proposizioni connesse tra loro, e cercando di evitare ogni superfluità, ed ogni ricerca, che vi rimanesse senz' uso, ed a' fondamenti della scienza non si apparteneva.

Di una cosa debbo scusarmi, ed è quella delle figure, a' disegni delle quali non ho potuto dare quell' estensione, e precisione grafica, che vi avrei desiderata, non conoscendo affatto l' arte di ben disegnarle, e nell' età in cui sono, non senza que' mali, che sogliono accompagnarla, e co' deviamenti della mia vita pubblica, e domestica, non avendo avuto nè tempo, nè pazienza di occuparmene in eseguirle almeno con una qualche esattezza, come feci da giovane, nella mia *Geometria descrittiva*. Da ciò è anche avvenuto, che non abbiano le costruzioni ricevuta quell'estensione, che loro sarebbe stata più conveniente per le arti grafiche, essendomi limitato, da geometra, a notare speculativamente i principj come procedere, in tutto l' andamento di esse; e talvolta con troppa brevità per non aver nè men tenuto innanzi quell' abbozzo informe di figura, che a mano poteva da me farsi, affidando il ragionamento alla semplice immaginazione; da che sono ancora derivati alcuni errori di lettere, che veggonsi notati nell' *Errata*.

E ciò per quanto concerne la prima parte elementare del presente trattato.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NELLA

PARTE I.

DELLA GEOMETRIA DI SITO

Prefazione

A chi debbasi la prima compilazione in forma di *Elementi* de' principii fondamentali della dottrina de' siti nello spazio, chiamandola *Geometria descrittiva*. — *pag.* V e VI

Prima compilazione fatta dal prof. Flauti degli Elementi della *Geometria descrittiva* nel 1801, come ciò avvenne, e dove insegnati. Quando pubblicati per le stampe, e giudizio che ne fecero distinti geometri italiani. — VI

Il Lacroix concorrè col Monge all' anzidetto scopo, pubblicando nel 1795 le sue istituzioni di tale scienza, col titolo di *Géométrie sur les plans, et les surfaces courbes*. — VII

Del *saggio* di *Geometria analitica di sito* compilato dal prof. Flauti per le sue lezioni nella cattedra dell' Università degli studi, dal 1806 al 1812. — VII *Nota*

Improprietà delle denominazioni date a questo ramo di scienza geometrica tanto dal Monge, che dal Lacroix; da che fu indotto il Flauti a dare al presente trattato il titolo di *Geometria di sito sul piano e nello spazio*, fin dalla prima volta che pubblicollo nel 1815. — VIII

In che questo trattato si differisca dalla *Geometria descrittiva* propriamente detta. — *ibid.*

Esposizione generale del contenuto ne' capitoli del trattato da I, a V. — VIII — X

Come si possano i teoremi di *Dati* de' cap. II e III. trasmutare in problemi descrittivi, per servirsene di prima istituzione in questa scienza grafica. — X — XI

Ricerche non proprie a questo argomento riportate da taluni autori di *Geometria descrittiva*. — XI

Nota a piè di pagina.

Esposizione del contenuto ne' cap. da VI a IX. — XI — XIV

Difettosa definizione del piano tangente una superficie curva data dal Monge, dall' Hachetto, e poi da altri adottata; e come corretta. — XV — XVI

Due problemi de' contatti sferici recati nel capito-

lo X, serbando a trattar tutti quelli di questa famiglia nel volume IV. degli *Opuscoli matematici*.		XVI
Indicazione del contenuto ne' capitoli dall' XI. al XIII.		XVII, XVIII
Considerazioni sulle curve a doppia curvatura recate nel capitolo XIV.		XVIII
Uso de' luoghi alla superficie nella soluzione de' problemi nello spazio (*cap. XV.*)		XVIII - XIX
Qual sia il vero senso in cui si debba prendere la voce *estensione*; ed esser falso, che gli antichi avessero poco conosciute le proprietà dell' estensione nelle tre dimensioni.		XIX - XXVI
Come debba coltivarsi la scienza geometrica a dì d'oggi.		XXVI, XXVII
Congettura del perchè non siene pervenuto tante opere importanti degli antichi.		XXVII-XXIX
Altro argomento per comprovare, che gli antichi dovettero trattare problemi nello spazio.		XXX
Equivoco del Montucla su' *Luoghi alla superficie*, *Nota*.		XXX, XXXI
Metodo tenuto nell'esposizione delle materie di questo trattato.		XXXI, XXXII
PARTE I.		
Cap. I. — Definizioni, e nozioni preliminari.	§§. 1 — 6	1, 2
Def. Dello spazio.	1	1
Def. Del sito di un oggetto geometrico nel piano, e nello spazio.	3	1
Nota.		
Scol. Qual debba essere la natura de' determinanti del sito di un oggetto geometrico; e specificazione di questi oggetti.	4	2
Def. Del *dato di sito*.	5	2
Def. De' *determinanti* il sito.	6	2
Cap. II. — Determinanti del sito de' punti, delle linee, e di alcune figure nel piano.	7 — 26	3 — 10
Teor. *I determinanti del sito di una retta nel piano sono due punti di essa dati di sito; e risulta pur dato di grandezza la retta interposta tra essi.*	7	3
Teor. *I determinanti del sito, e della grandezza di un cerchio sono il sito del centro, e la grandezza del raggio.*	8	3
Nota a' §§. 7 ed 8.		
Teor. *Se è dato il sito di due rette, risulta ancor dato quello del punto del loro incontro.*	9	4
Nota.		

Teor. *Dal sito di due punti risulta determinato quello di un terzo, che serba da essi distanze date.*	10 - 12	4 , 5
Teor. *Dal sito di un punto rispetto ad una linea retta rimane assegnato , 1. il sito e la grandezza della perpendicolare tirata a questa da quello , 2. il sito della parallela tiratale per quel punto ; 3. il sito di qualunque inclinata ad essa , tiratagli dal punto , in angolo dato.*	13	5 , 6
Teor. *Date due rette di sito in un piano , è dato l' angolo da esse compreso incontrandosi . E se sia dato l' angolo di due rette , e 'l sito dell' una , e del vertice dell' angolo ; sarà ancor dato il sito dell' altra*		
N' è ancor vera la *conversa.*	14 , 15	6
Teor. *I determinanti del sito di un punto rispetto a due rette date in un piano , che s' intersechino , sono le distanze date di quello da ciascuna di queste.*	16.	7
Scol. 1. Supponendo tali rette indefinite pe' due loro versi ; il sito del punto risulta quadruplice.	17	7
Scol. 2. Esibizione facilissima del punto , quando le due rette sieno ortogonali.	18	7 , 8
Def. Le due rette alle quali si riferisce un punto , per determinarne il sito nel piano , diconsi *direttrici, ortogonali* se ad angolo retto , *obbliqua* in caso contrario.	19 , 20	8
Teor. Determinanti di una linea curva nel piano.	22	9
Teor. Da tre punti dati nel piano risulta dato di grandezza, e di specie il triangolo, che si ottiene congiugnendoli .	24 , 25	10
Una tal verità si estende a qualunque rettilineo.	26.	10
Nota.		
Cap. III. — De' determinanti del sito de' punti , delle linee rette , e degli angoli nello spazio.	27- 68	11- 28
Def. Che dicesi *projezione* di un punto nello spazio su di un piano . Che intendasi per *piede* della perpendicolare tirata al piano dal punto ; che per altezza del punto.	28	11
Cor. *Tutt' i punti delle perpendicolare ad un piano hanno su questo la stessa projezione , cioè il piede di essa sul piano .*	29.	11
Def. Cosa intendesi per piano *abbattuto* con un altro, ch'era con questo ad angolo:	30.	11
Teor. *La projezione di una retta nello spazio su di un piano è un' altra retta.*	31.	12
Cor. 1. *Tutte le linee rette in un piano perpendicolare ad un oltro , hanno per loro projezione su questo la comune sezione de' piani.*	32.	12
Cor. 2. *I determinanti le projezioni di una retta su*		

di un piano, sono le projezioni di due punti di essa su questo.	33	12
Def. Che intendasi per projezione su di un piano di una retta nello spazio.	34	12
Cor. *La perpendicolare ad un piano ha per projezione su questo il piede di quella.*	35	12
Def. Della retta parallela ad un piano.	36	12
Cor. 1. *Tirando per un punto di un piano la parallela ad una retta parallela al piano, questa deve cadere nel piano stesso.*	37	12
Cor. 2. *Una retta terminata parallela ad un piano adegua la sua projezione su questo.*	38	13
Scol. Quando i piani di projezione sono ortogonali l' uno suol dirsi *orizzontale*, l' altro *verticale*: e le projezioni de' punti, delle rette, o degli altri oggetti geometrici su di essi prendono pure il nome corrispondente di *orizzontale*, e *verticale*.	40	13
Teor. *È dato il sito di un punto nello spazio, se ne sia data la projezione su di un piano di sito, e l' altezza su questo.*	41	14
Teor. O pure, *se ne sono date le projezioni su due piani di sito ad angolo.*	42	14
Cor. 1. *L'altezza di un punto su di un piano orizzontale è quanto la perpendicolare, che dalla projezione verticale di esso si tiri alla comune sezione de' piani ortogonali; e viceversa.*	43	15
Cor. 2. *Se una linea retta è parallela ad uno de' piani di projezione ortogonali; la sua projezione sull' altro di essi sarà ancor parallela alla comune sezione di que' piani ortogonali.*	44	15
Scol. 1 e 2. Come si trasporta la projezione di un punto, o di una retta da un piano dato di projezione ad un altro.	45- 47	15- 16
Teor. *È pur dato il sito di un punto nello spazio, se ne sien date le distanze da tre piani di sito, che s' incontrino.*	48	16, 17
Scolii. — *E' però, se ne sono date le distanze da tre assi fissati nello spazio, sieno ortogonali, o pure inclinati in dati angoli.*	50- 51	17, 18
Nota.		
Teor. *È dato il sito di una retta nello spazio, se sono date le projezioni di due suoi punti su di un piano di sito, e le altezze di questi sul medesimo.*	52	18
O pure, *se sien date le sue projezioni su due piani di sito ad angolo.*	53	18, 19
Scol. gen. — Tra i determinati assegnati pel sito de' punti, e delle rette nello spazio, quali sieno i più propri. Considerazioni per farne uso nelle arti del disegno.	54- 56	19, 22
Teor. *Dato il sito di una retta nello spazio rispet-*		

to a due piani ad angolo, sono dati i punti ove quelle incontrano ciascun de' piani.	57	22-24
Teor. *Date di grandezza le projezioni di una retta, è ancor data la sua grandezza.*	58	24
Scol. 1. Come si ottenga facilmente la differenza delle altezze degli estremi di una retta data di sito, riferita a piani ortogonali.	59	24, 25
Scol. 2. *Una retta nello spazio sta alla sua projezione, come il raggio al coseno dell' angolo in cui inclinasi la retta al piano di tal projezione.* E ciò conduce a determinare un tal angolo.	60	25
Teor. *Dato il sito di due rette, che s' intersegano nello spazio, è dato quello del loro incontro.*	61	25
Cor. *La congiungente le intersezioni delle projezioni, su due piani di sito che s' incontrano, di due linee rette; che s' intersegano nello spazio, risulta perpendicolare alla comune sezione de' piani, quando questi suppongansi l' un l' altro abbattuti.*	62	25, 26
Scol. La sola condizione poc' anzi detta non basta a determinar la converse della precedente proposizione, cioè che le due rette debbano intersegarsi nello spazio.	63	26
Teor. *Dato il sito di due rette, che intersegano nello spazio, è pur dato l' angolo da esse compreso.*	64	26
Teor. *Dati di sito i vertici degl' angoli di una figura rettilinea nello spazio; la figura sarà data di sito e di grandezza.*	65	27
Teor. *Un triangolo nello spazio sta alla sua projezione su di un piano, come il raggio al coseno dell' angolo in cui inclinasi a questo il piano del triangolo.*	66	27, 28
Cor. 1. e 2. Lo stesso per un poligono qualunque, o altra figura piana.	67, 68	28
Cap. IV. — De' determinanti il sito de' piani, delle linee curve, che esistono in essi, degli angoli solidi, e de' poliedri nello spazio.	69-96	29-48
Def. Che intendasi per *traccia* di un piano su di un altro di sito.	69	29
Teor. *I determinanti del sito di un piano nello spazio sono le sue due tracce su due piani di sito ad angolo.*	70	29
O pure, *una delle sue due tracce, e 'l sito di un punto di esso.*	72	30
O ancora *il sito di tre punti di esso.*	73	31
O *una delle sue tracce, e l' angolo in cui esso inclinasi al piano di questa.*	77	33-35
O finalmente, *una delle tracce, e l' angolo di questa con l' altra.*	79	37

Lemma pel §. 77.	75, 76	32, 33
Teor. *Dato il sito di un piano nello spazio è ancor dato l'inclinazione di esso a ciascuno de' piani di projezione cui è riferito.*	78	35
Teor. *E n' è pur dato di sito ogni punto di esso, data che ne sia una sola projezione.*	80	38
Teor. *Dati di sito due piani, che s'intersegano, è ancor data di sito e di grandezza la loro comune sezione.*	81	38 - 39
Ed è dato ancora l' angolo della loro scambievole inclinazione.	84	39, 40
Scol. Due casi particolari del teor. n. 81.	82 - 83	40 - 41
Teor. *Dato il sito di un piano, e quello di una retta che l' incontra nello spazio, è dato il sito del punto dell' incontro.*	86	41, 42
Teor. *Dato il sito di un piano, e di un punto, è data di sito e di grandezza la perpendicolare, che dal punto si tira al piano; e di sito il punto ove l' incontra.*	87	42, 43
Scol. *Se una retta è perpendicolare ad un piano; le projezioni della retta sono perpendicolari alle rispettive tracce del piano.*	88	43
Teor. *Dato il sito di una retta, e quello di un punto, è dato il sito del piano, che pel punto si tira perpendicolarmente alla retta.*	89	43, 44
Cor. *Ed ancora il sito, e la grandezza della perpendicolare, che dal punto si tira alla retta.*	90	44, 45
Dato il sito di un piano, e quello di una retta, è dato di sito il punto ove questa l' incontra, e di grandezza l' angolo nel quale gli si inclina.	91	45
Teor. *È dato il sito, e la configurazione di una linea curva esistente in un piano dato nello spazio, se sien date le projezioni di quella su due piani di sito ad angolo.*	92	46
Nota		
Scol. In qual modo si otterrebbero le cose dette nel precedente teorema, se la curva proposta fosse una curva definibile.	93	46, 47
Teor. *Dato il sito di ciascun de' lati di un angolo solido triedro, è dato ancora un tal angolo di sito, e di grandezza.*	94	47
Nota: ed in essa vien riportata la compiuta costituzione dell' angolo solido triedro, e quindi del triangolo sferico corrispondente.		
Cor. Il teorema precedente ha ancor luogo se l' angolo solido fosse poliedro.	95	47
Teor. *Dato il sito de' vertici degli angoli di un solido poliedro; il solido risulta dato di grandezza, e di sito.*	96	48
Cap. v. — Applicazione delle precedenti		

teoriche alla risoluzione di alcuni problemi.	97-112	49 - 61
PROBL. *Tirare per un punto dato nello spazio la parallela ad una retta in esso data.*	97	49
PROBL. *Tirare per un punto dato nello spazio un piano parallelo ad un altro piano dato.*	98-100	49 , 51
PROBL. *Date di sito due rette, assegnare il piano condotto per l' una parallelo all' altra.*	101	51 , 52
SCOL. Come dal prec. probl. risulti determinato ciò che fu avvertito nel §.63.	102	52
PROBL. *Ad un punto dato in una retta di sito nello spazio costituire un angolo uguale ad un dato.*	103	52 , 53
Nota.		
PROBL. *Condurre per una retta di sito nello spazio un piano, che s' inclini all' un di quelli di projezione in un angolo dato.*	104	54
SCOL. *Se ne ritera esser anche dato il sito di un piano da una delle sue tracce, e dall' angolo d' inclinazione di esso al piano dell' altra.*	105	54 , 55
PROBL. *Per una retta data in un piano di sito nello spazio far passare un altro piano, che costituisca col primo un angolo dato.*	106	55 , 56
PROBL. *Dato un angolo, e l' inclinazione de' suoi lati all' un de' piani di projezione; assegnare le projezioni di esso angolo.*	107	56 , 57
SCOL. 1. O ch' è lo stesso: *Dato di sito e grandezza un angolo nello spazio, e doti quelli che comprendono i suoi lati con la perpendicolare che dal suo vertice cade sull' un de' piani di projezione; esibire la projezione corrispondente di quell' angolo.*	108	57
SCOL. 2. Il problema enunciato nel precedente scolio corrisponde a ciò, che nelle pratiche geodesiche si dice *riduzione di un angolo all' orizzonte.*	109	57
PROBL. *Costituire ad un punto dato in una retta di sito nello spazio un angolo uguale ad un dato, con una retta, che s' inclini all' un de' piani di projezione in angolo dato.*	110-111	58 , 59
PROBL. *Esibire il sito, e la grandezza della minima distanza di due rette nello spazio.*	112	59 - 61
Nota.		
CAP. VI. — Delle superficie curve, e de' determinanti del loro sito nello spazio.	113-135	62 - 70
Nota.		
DEF. Che intendasi per curva *definibile.*	114	
DEF. Quando una linea curva dicesi data in un piano.	115	
DEF. Genesi di una superficie curva, e sua *direttrice*, e *generatrice.*	118	63
Nota.		

Def. Genesi universale delle superficie coniche, e cilindriche dedotta dalla definizione precedente.	120-122	63, 64
Def. Distinzione delle superficie di rivoluzione in *costanti* e *variabili*.	124,125	64, 65
Lem. *Dividendo le ordinate di una curva in una costante ragione, per tutt' i punti di tali divisioni passa una curva della stessa natura della proposta.*	126	65
Cor. *E se due curve della stessa natura abbiano un asse comune, le ordinate corrispondenti ad una medesima ascissa saranno in una ragione costante.*	127	65, 66
Lem. *Segando una superficie di rivoluzione costante, o variabile con un piano parallelo alla sua direttrice, si otterrà per sezione una curva simile a questa.*	128	66
Cor. Un carattere delle curve simili.	129	66
Teor. Determinanti del sito di una superficie curva di rivoluzione.	130	67 - 69
Cor. Per le superficie coniche, e cilindriche.	131	68
Scol. Nel caso di una curva definibile, e di nota descrizione, la projezione verticale della generatrice passante per un dato punto, può ottenersi anche con un moto continuo.	132	68
Teor. *S' è dato il sito di una superficie curva, è ancor dato quello di ogni punto di essa di cui abbiasi una sola projezione.*	133	69, 70
Def. Che intendasi per *costruzione* di una superficie curva.	134	70
Cap. VII. — Costruzione speciale delle superficie cilindriche, coniche, e di rivoluzione costante.	136-140	71 - 74
Costruzione di una superficie cilindrica data di sito.	136-137	71, 72
— Di una superficie conica data di sito.	138	
— Di una superficie di rivoluzione costante data di sito con l' asse verticale.	139	73, 74
Cap. VIII. — De' piani tangenti le superficie curve, e delle normali ad esse; e specialmente di quelli tangenti le superficie cilindriche, e coniche.	141-167	75 - 83
Def. Del piano tangente, conseguenze di essa; d' onde il principio fondamentale per la determinazione del piano tangente.	141-146	75, 76
Def. Delle superficie curve che si toccano, e della normale ad una superficie curva in un punto dato di essa; e come tal ricerca dipenda da quella del piano tangente.	148-151	76

Probl. Del piano tangente una superficie cilindrica data di sito, per un punto dato in essa.	152,153	77
Probl. Del piano tangente una superficie cilindrica data di sito, per un punto dato fuori di essa.	154-155	78 - 79
O parallelo ad una retta di sito.	156	80
Scol. 1. Come possa tirarsi graficamente ad una curva la tangente parallela ad una retta data.	157	80
Scol. 2. E come possa tirargliai in modo, che s' inclini ad una retta di sito, nel piano di essa, in un dato angolo.	158	80
Probl. *Tirare ad una superficie cilindrica un piano tangente, che s' inclini all' orizzontale in un angolo dato.*	159,160	80, 81
Gli stessi quattro precedenti problemi risoluti per la superficie conica.	161-164	81 - 83
Cap. IX. De' piani tangenti le superficie curve di rivoluzione costante, e specialmente le sferiche.	165-193	84-105
Probl. Del piano tangente una superficie di rivoluzione con l' asse verticale, per un punto dato in essa.	165	84, 85
Riduzione nel caso della sfera.	166	85
Probl. Del piano tangente una superficie sferica data, passante per una retta di sito.	167,168	86
Lem. 1. *Tirare la tangente comune a due cerchi dati di grandezza e di sito, in un piano.*	169,170	87
Nota.		
Probl. Del piano tangente due superficie sferiche date di grandezza e di sito.	171	88, 89
Lem. 2. *I tre punti di concorso delle tangenti comuni a tre cerchi dati, di grandezza e di sito, in un piano, sono allogati in una retta.*	173	89
Nota.		
Probl. Del piano tangente tre superficie sferiche date di grandezza, e di sito.	174,175	90, 91
Nota.		
Lem. 3. *Assegnare in un piano di sito la traccia di una superficie cilindrica, con la generatrice parallela ad una retta data di sito, circoscritta ad un' altra di rivoluzione ancor data, con l' asse perpendicolare a quel piano.*	176-178	91 - 94
Lo stesso per una superficie conica col vertice dato.		
Nota nella quale si dimostra, che: *La linea di contatto di una superficie di rivoluzione generata da una curva conica, col cono di un dato vertice circoscrittole, o con una superficie cilindrica con la generatrice parallela ad una retta di sito, è una curva conica.*		
Probl. Del piano tangente una superficie di rivo-		

luzione, il quale passi per una retta di sito.	179,180	94
Nota per questo problema, e pe' seguenti fino al termine del capitolo.		
Probl. Del piano tangente una superficie di rivoluzione, con l'asse verticale, parallelo ad un piano dato.	181-183	95-97
Costruzione speciale per la superficie sferica.	184	97, 98
Probl. Del piano tangente una sfera, ed una superficie cilindrica, date di sito.	185	98, 99
Probl. O pure, tangente una sfera, ed una superficie conica, date di sito.	186,187	99,100
Scol. per le due precedenti soluzioni.	188	100,101
Probl. Del piano tangente una superficie di rivoluzione data di sito, ed un'altra cilindrica similmente data.	189	101,102
Probl. O pure un'altra conica.	190	102
Lem. *Circoscrivere a due sfere date di grandezza, e di sito, se uguali, una superficie cilindrica, se disuguali una conica.*	191	103,104
Scol. Da tal problema risulta anche un'altra soluzione di quello del piano tangente una data sfera, per un punto dato fuori di essa.	192	104
Probl. Del piano tangente due sfere date di grandezza e di sito, ed una superficie di rivoluzione costante similmente data.	193	105
Cap. x. — De' contatti sferici.	194-208	106-118
Nota.		
Perchè si rechi la soluzione del principal problema di questa famiglia.	194	106
Def. Per la chiara intelligenza del seguente lemma.	195,196	107
Lem. 1. *problematico*, per la riduzione di tali problemi.	197	107,108
Lem. 2. *problematico.*	198	108,109
Lem. 3. Ch'è un teorema locale per la riduzione de' problemi de' contatti sferici, e del quale si dà la soluzione sì geometrica, che grafica.	199-201	109-111
Caso particolare pel precedente lemma.	201	112
Lem. 4. *problematico*, per l'anzidetta riduzione, risoluto geometricamente, e graficamente.	202,203	112-114
Probl. Delle quattro sfere da farsi toccare da una quinta.		
Soluzione geometrica.	204	114,115
Soluzione grafica.	205	115,116
Probl. *Descrivere una sfera di dato raggio, che tocchi tre sfere date di grandezza, e di sito.*	206,207	117,118
Soluzione grafica di tal problema.	208	118

CAP. XI. Degl' incontri di una retta di sito con una superficie similmente data.	209-215	119-125
Importanza dell' argomento delle intersezioni delle superficie curve, e come ripartito nel precendente trattato.	209	119,120
PROBL. *Costruire gl' incontri di una retta di sito con una superficie cilindrica similmente data.*	210	120,121
PROBL. Lo stesso con una superficie conica.	211	121,122
Nota pe' due precedenti problemi.		
LEM. *Segando una superficie di rivoluzione con un piano parallelo al suo asse; la sezione sarà una curva simile alla generatrice.*	212,213	122,123
Esempi in dilucidazione del precedente lemma.	214	123
PROBL. *Costruire gl' incontri di una retta di sito con una superficie di rivoluzione costante.*	215	124,125
CAP. XII. — Delle intersezioni di un piano con una superficie cilindrica, conica, o di rivoluzione costante.	216-242	126-139
TEOR. 1. *Le sezioni prodotte in una superficie cilindrica da piani paralleli, sono tutte identiche tra loro.*	217	126
E però se il piano sia parallelo a quello della traccia di tal superficie, la sezione sarà identica a tal traccia.	218	126
Come in questo caso si assegni la projezione di quella sezione sul piano della traccia, cui sia obbliqua la generatrice della superficie cilindrica.	219	127
TEOR. 2. *Qualunque sezione prodotta da un piano in una superficie cilindrica, è curva dello stesso genere della direttrice di tal superficie.*	220	127,128
Nota in cui vien recata un' altra dimostrazione di tal verità, nel caso che la direttrice della superficie cilindrica sia una curva definibile.		
TEOR. 3. *In un cilindro retto a base circolare non può esservi alcuna sezione circolare, oltre la parallela alla base.*	222	128,129
E le sezioni in esso prodotte da piani sono ellissi, il cui asse maggiore sta al minore, come il raggio al coseno dell' angolo d' inclinazione del piano segante a quello della base del cilindro.	221-223	128,129
TEOR. 4. *Nel cilindro a base ellittica possono aver luogo, per ogni punto dell' asse, due sezioni circolari.*	224	129,130
Nota in cui dimostrasi in altro modo diretto la verità di questo teorema.		
TEOR. 5. *Segando una superficie conica con piani paralleli, le sezioni saranno curve simili tra loro*	225	130,131

Nota (la stessa che pel teor.2), E però se il piano segante sia parallelo a quello della traccia della superficie conica, la sezione sarà una curva simile a tal traccia. E come si possa assegnare quella curva sul piano di questa.	226,227	131
PRINCIP. — *Due curve di diversa natura non possono mai, ravvicinandosi l' una all' altra, confondersi tra loro.*	228	131
TEOR. 6. *Comunque seghisi con un piano una superficie conica, la sezione è sempre della stessa natura che la direttrice.*	230	132
TEOR. 7. *In ogni cono a base ellittica, può sempre condursi pel centro della base un piano, che produca nella superficie conica una sezione circolare.*	232	133
Nota (la stessa che pel teor. 4). Altra nota.		
COR. Quindi ogni cono a base ellittica, è la stessa cosa che un cono a base circolare, diversificandosi solamente per la sezione che prendesi per base, o direttrice della superficie conica.	233	133
PROBL. *Costruire l' intersezione di una data superficie cilindrica con un piano di sito.*	235	134,135
Come esibiscasi l' effettiva curva d' intersezione, e la tangente ad essa per un dato punto.	236,237	135
PROBL. *Costruire l' intersezione di una superficie conica data di sito, con un piano di sito, perpendicolare a quello di projezione verticale.*	238	136
Nota in cui si dimostra la polare di una curva conica assegnabile dalla stessa sua genesi per sezione.		
SCOLII. — Come costruiscasi l' effettiva curva di sezione, e le si tiri la tangente in un punto dato.	239,240	136,137
PROBL. *Costruire l' intersezione di una superficie di rivoluzione data di sito, con l' asse verticale, e di un piano di sito perpendicolare al verticale di projezione.*	241	137,138
Nota a piè pag.		
SCOL. Indicazione per esibir l' effettiva curva di sezione, e la tangente ad essa in un punto dato.	242	138
CAP. XIII. — Delle intersezioni delle superficie curve.	243-260	139-155
Tali intersezioni danno più comunemente luogo alle così detto *curve a doppia curvatura.*	243	139
Nota nella quale dimostrasi generalmente il seguente teorema: *Se un cono penetrando una superficie del second' ordine vi produca una curva piana, dovrà anche esser piana l' altra curva, per cui n' esce.*		
Lo stesso pel cilindro.		
PROBL. GENER. — Nel quale si abbozza il metodo		

generale per costruire l'intersezione di due superficie curve date di sito, e di forma, le quali s'intersogano.	244	139,140
Riguardi da usare in adoperarlo .	245	140,141
Probl. Per la tangente all' intersezione di due superficie curve , per un punto dato in essa .	246	141
Probl. *Costruire l' intersezione di due superficie cilindriche date di sito.*	248	141-143
Limiti delle curve d' intersezione, e delle loro projezioni.	249	143
Probl. *Costruire l' intersezione di due superficie coniche date di sito.*	250	144,145
Probl. *Costruire l' intersezione di una superficie conica data di sito , con una superficie cilindrica similmente data.*	252	145,146
Probl. *Costruire l' intersezione di una superficie cilindrica data di sito con un' altra di rivoluzione, intorno ad un asse verticale, anche data di sito.*	253	146,147
Probl. *Costruire l' intersezione di una superficie cilindrica , e di un' altra sferica, date di sito.*	254,255	148,149
Scol. Che da tal problema possa graficamente costruirsi l'elegantissima soluzione del Viviani al suo enigma geometrico della volta emisferica quadrabile.	256	149
Probl. *Costruire l' intersezione di una superficie di rivoluzione data di sito, intorno ad un asse verticale, con una superficie conica anche data di sito .*	257	150,151
Probl. *Costruire l' intersezione di una superficie conica data di sito con quella di una sfera similmente data.*	258	151-153
Probl. *Costruire l' intersezione di due superficie di rivoluzione date di sito.*	259	153-155
Modificazione che ricevo un tal problema nel caso, che le superficie proposte sieno di 2°. ordine.	260	155
Cap. xiv.— De' determinanti del sito delle linee curve a doppia curvatura ; ed alcun problema fondamentale per la loro teorica .	261-266	156-160
Maniera di trattare questo argomento uniformemente a quella indicata per le curve piane ; e vantaggio che in tal argomento offre l' analisi moderna ,	261	156,157
Teor. *I determinanti del sito , e della forma di una curva a doppia curvatura , sono le projezioni di essa su due piani ad angolo .*	262	158
Cor. E però ne sono determinanti le due superficie cilindriche rette a due piani , che s' incontrano , le quali abbiano per direttrici su questi le projezioni rispettive di quelle linee curve .	263	158
Probl. *Date le projezioni di una linea curva nello spazio ; determinare se essa sia a semplice , o pure a doppia curvatura.*	264	159

Cor. Se ne rileva, che una curva a doppia curvatura non possa aver mai per projezione su di un piano una linea retta.	265	159,160
Teor. *La tangente una linea curva nello spazio, in un punto di essa, ha per projezioni le tangenti le projezioni di tal curva in que' punti, che sono le projezioni del proposto.*	266	160
Cap. xv. — Di alcuni problemi nello spazio risoluti per mezzo de' luoghi alla superficie.	267,308	161-198
Nota.		
Le superficie curve sono i luoghi geometrici delle proprietà costanti di cui esse sono dotate; e però per mezzo di esso possonsi costruire i problemi proposti co' dati nello spazio, del pari che con le linee curve a semplice curvatura costruisconsi quelli co' loro dati nel piano. Importanza del presente argomento per l' oggetto poco fa indicato.	267	161,162
Che le linee curve a doppia curvatura non sieno esse propriamente i *luoghi alla superficie* — Digressione sulla necessità di coltivare per tale oggetto la Geometria antica.	267	162
Probl. *Date due rette di sito, nello spazio; esibire quel punto nell' una di esse, che disti dall' altra per una retta data. — Determinazione di tal problema.*	268	163
Nota in cui recasi la soluzione geometrica di tal problema.		
Probl. *Date di sito due rette, e nell' una di esse un punto; inclinare a questa dall' altra una retta, che vi comprenda in quel punto un angolo dato.*	269	164
Nota per l' analisi geometrica di tal problema.		
Probl. *Data, nello spazio, una retta indefinita di sito, e dati fuori di essa due punti; ritrovare nella medesima quel punto che congiunto co' dati:*		
I° *Sia data la somma, o la differenza de' quadrati delle congiungenti.*		
II° *La somma, o la differenza di queste.*		
III° *L' angolo, che vi comprendono.*		
IV° *La loro ragione*	270-276	165-168
Note corrispondenti a piè pag., e Note in fine del trattato, in cui sono recate le soluzioni geometriche di tali problemi.		
Probl. *Circoscrivere la sfera ad una data piramide triangolare.*	277	168,169
Nota.		
Scol. 1. Riduzione più elegante della precedente costruzione.	278	169,170

Scol. 2. Osservazione sull' analisi geometrica di questo problema.	279	170
Probl. *Iscrivere la sfera in una data piramide triangolare.*	280	170,171
Nota.		
Lem. *Le tre congiungenti i punti corrispondenti delle scambievoli intersezioni di tre cerchi, o concorrono in un medesimo punto, o pur sono parallele tra loro.*	281	171,172
Cor. 1. Se ne rileva, che: *Se nella linea retta la quale unisce i punti d'intersezione di due cerchi si prenda un punto, dal quale si tirino a' cerchi due corde; per le intersezioni di queste co' due cerchi, dovrà sempre passare la circonferenza di un cerchio.*	282	172
Cor. 2. *Se le congiungenti, le intersezioni rispettive di tre cerchi risultino parallele; i loro centri giaceranno in linea retta. Ed al contrario.*	283	172
Teor. *Se tre sfere s' intersegano scambievolmente; i piani de' cerchi in cui s' incontrano, due a due, dovranno concorrere in una medesima retta perpendicolare al piano che passa pe' centri di esse sfere, o pure esser paralleli tra loro.*	285	172,173
Teor. *Tre superficie sferiche, le quali abbiano i loro centri in linea retta, se interseghinsi scambievolmente, avranno due soli punti di comune.*	286	174
Probl. *Dati i sei lati di una piramide triangolare, costruire l' altezza di ciascun suo vertice sul piano opposto.*	287	175
Nota.		
Scol. Se ne deduce un' altra soluzione elegante del problema di: *Descrivere la sfera di dato raggio, che ne tocchi tre altre date*: Come ancor quella di: *Determinare un punto nello spazio, date le sue distanze da tre altri punti dati.*	288	175,176
Probl. *Assegnare quel punto, che congiunto con tre altri dati, sia una delle congiungenti a ciascuna delle altre in ragioni date.*	289,290	176
Nel caso che un tal punto sia fuori del piano degli altri tre, il problema corrisponde a quello di: *Costruire la piramide triangolare, dati i lati della base, e le ragioni degli altri tre lati.*	291	176,177
Probl. *Esibire il vertice della piramide triangolare, dati i lati della base, e gli angoli compresi dalla sua altezza co' lati dell' angolo verticale.*	292	178
Scol. Costruzione impropria data di questo problema da taluni geometri.	293	179
Probl. *Dati in una piramide triangolare i lati delle base, ed i tre angoli al vertice di essa; costruire questo punto.*		
Soluzione grafica, *analisi geometrica*, e *determinazione.*	294-296	179-182
Nota.		

Soluzione geometrica del prof. Scorza.	297	182-184
Soluzione meccanica.	298	184
Scol. Istoria di questo problema, e considerazioni sulle diverse soluzioni date di esso.	299	185-189
Probl. *Dividere una piramide triangolare in quattro altre piramidi triangolari, le quali abbiano per basi le facce della piramide data, e per vertice uno stesso punto dentro di essa, e che serbinsi rispettivamente tra loro ragioni date.*	300	190,191
Scol. In cui s'indica la soluzione del problema: *Dati quattro rettilinei in diversi piani di sita, che s'incontrino; determinare quel punto, che preso per vertice di quattro piramidi aventi per basi que' rettilinei, abbiano questi tra loro ragioni date.*	301	191
Probl. *Ritrovare le due medie proporzionali tra due rette date.*		
Soluzione di Archita.	302	192,193
Scol. Considerazioni sulla composizione del precedente problema.	303	193,194
Nota.		
Teor. *È data il sito di un punto nello spazio, se sien date le distanze, ch' esso serba da tre altri punti già dati di sita nel medesimo.*	304	195
Nota		
Teor. *È dato il sito di un punto nello spazio, se sien date le distanze di esso da tre rette date di sito nel medesimo.*	305	196
Costruzione grafica del punto co' precedenti dati.	306,307	197
Scol. pe' precedenti due teoremi di *Dati*.	308	197,198
Cap. XVI. — Considerazioni generali sullo sviluppo delle superficie curve.	309-326	199-207
Def. Quando una superficie si dirà *sviluppabile*. — Conseguenza di tal definizione; ed oggetto dello sviluppo delle superficie curve sviluppabili.	309-311	199
Probl. *Assegnare le condizioni geometriche per lo sviluppo delle superficie curve.*	312	199,200
Se ne ricava il carattere per le superficie curve sviluppabili.		
Cor. 1. Condizione che ne deriva pel piano tangente una di queste superficie in un punto di essa.	313	200
Cor. 2. Altra proprietà, che si deriva per le superficie sviluppabili.	314	200
Scol. Che questo argomento siasi qui elementarmente trattato, serbando a ripigliarlo altrove in modo più generale, e conveniente ad esso.	315	201
Teor. *La tangente di una curva segnata in una superficie sviluppabile, sulla sviluppo di questa, fa con quel lato, che passava per lo contatto lo stesso ango-*		

lo, che vi comprendeva prima dello sviluppo.	316	201
Scol. Da che riesce facile il determinare, sullo sviluppo di una superficie, il sito della tangente.	317	201
Probl. *Sviluppare una superficie cilindrica, e rapportare sullo sviluppo una curva data in essa.*	318	202
Scol. La curva, che sullo sviluppo di una superficie cilindrica viene rappresentata da una retta, dee intersegare tutt' i lati del cilindro in un medesimo angolo. Ed al contrario:	319	202,203
Tutte le volte, che un arco di curva segnata su di una superficie sviluppabile distendesi in linea retta sullo sviluppo della medesima, esso rappresenterà la più corta distanza su tal superficie tra que' due punti, che n' erano gli estremi.	320	203
Probl. *Sviluppare una superficie conica a base qualunque; ed indi segnar su tale sviluppo una linea curva data in essa.*	321	204,205
Come resti simplificata la costruzione nel caso della superficie conica a base circolare.	322	205
Lem. 1. *Le semiordinate che in due semicerchi dividono proporzionalmente i diametri, dividono anche proporzionalmente le semicirconferenze.*	323	206
Lem. 2. *La semiellisse segnata sulla superficie di un semicilindro retto, da un piano perpendicolare al rettangolo sottoposto condotto per la costui diagonale, divide la semicirconferenza prodotta nella stessa superficie cilindrica da un piano parallelo alla base, nella stessa proporzione che il diametro di questo divide la semicirconferenza descritta dal diametro il lato del cilindro.*	324,325	206,207
Probl. *Dividere un arco, o pure un angolo in data ragione.*	326	207
Nota.		

AVVERTIMENTO.

Riserbandoci a dare in fine dell' intero trattato, se farà bisogno, un più esatto elenco degli errori essenziali a correggere, per ora potrà bastar questo che qui si vede.

		ERRORI	CORREZIONI
Pag. 9	v. 20	*pr.* 9	*prop.* 42.
15	6	ad $a'A'$, ed $A'a'$ uguale ad aA	ad $a'A$, ed Aa' uguale ad aA'
32	17	*fig.* 13.	*fig.*12.
34	22	*Dopo* in questa *soggiungasi* — supposto il piano $a'A'L$ nel suo vero sito rispetto all' altro $aA'L$	
39	*ult.*	Pp	P'p
47	5	è	e
57	5	Cef'	C'ef
	27	a	a'
69	26	lc	la
72	9	gli	li
77	14	delle	della
93		Al cor. corrispondono le *fig.*46, e 47	
95	23	questa	questo
	23,24	incon-cre sul	incontro sul
96	8	$gH'k'$	$gH'h'$
	11	$K'k'$	$K'b'$
113	14	MN	SN
	23	a quello, che le si abbassa — che si abbassa a quello	
115	4	*Dopo* OL *soggiungasi* — a' tre piani di sito per le EF, GH, KL, perpendicolari rispettivamente alle AB, AC, AD, ne' punti E, G, K	
	24	F	E
121	23	*abd*	*cbd*
122	17	BCA	BAC
	25	DAC	DAE
123	23	ABC	BAC
127	5	delle	della
	11	AK	BK
130	14	BRC, *bro*	RBC, *rbc*
145	21	*fig.* 84	*fig.* 81
	27	*heg*	*heg*
148	25	*bfc*	*bfg*
173	1	*parallele*	*paralleli*
190	9	*fig. 101*	*fig. 102*
199	17	TEOREMA	PROBLEMA
202	24	Ti'	Ii'
206	18	*semicilindro*	*semicilindro retto*

Nell' Indice vi è omessa l' indicazione della *Nota a'* §§. *73 e 78*; l' altra a' §§. *141, 148, 150*; la *Nota* dopo il *teor. 2* a pag. XLIII deve andare dopo il *teor. 1*, Vi è pure omessa la segnatura di *Nota* dopo il §. 291, e l' altra dopo i §§. 292 e 293.

PARTE I.

DELLA

GEOMETRIA DI SITO

SUL PIANO E NELLO SPAZIO.

Digitized by Google

Digitized by Google

GEOMETRIA DI SITO

SUL PIANO, E NELLO SPAZIO

CAPITOLO I.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

1. Def. 1. *Spazio* dicesi l' estensione per tre dimensioni illimitata, e similare.

2. Scol. Da questa definizione dello spazio, e da quella del piano data da Euclide risulta, esser le parti del piano, e quelle dello spazio indiscernibili; che perciò niuna delle cose esistenti in ciascuno di essi potrà distinguersi rapportandola alle loro parti; o sia queste non potranno mai esser mezzo da discernere due oggetti geometrici identici, che si trovino nell' uno, o nell' altro.

3. Def. II. Per *sito*, o *posizione* di un oggetto geometrico, in un piano, o nello spazio, s' intende la determinata ed invariabile maniera di esistere di un tal oggetto, per rapporto ad altre cose geometriche già stabilite nel piano stesso, o nello spazio medesimo.

Siffatta maniera di esistere appartenendo a quel tale oggetto, non può competere, che ad esso solo, per rapporto alle cose geometriche fissate; e quindi è incomunicabile a qualunque altro simile oggetto, che non occupi lo stesso luogo del proposto.

4. Scol. Le cose geometriche fissate, per mezzo delle quali si vuol conoscere il sito di un oggetto geometrico, conviene che sieno le più semplici ch' è possibile; per cui se trattasi di determinare il sito di una cosa geometrica nel piano, non potranno essere che punti, o linee rette; e trattandosi di determinarlo nello spazio potranno essere anche piani.

Similmente gli oggetti, che si vogliono determinare, cioè quelli de' quali si vuol conoscere il sito, se ciò è nel piano, potranno essere o altri punti, o linee, o figure piane di qualsivoglia specie; e nello spazio potranno inoltre essere anche superficie di qualunque solido, o pur linee risultanti dall'intersezione di queste.

5. Def. iii. Un oggetto geometrico si dirà *Dato di sito* in un piano, o nello spazio, se geometricamente siesi stabilita l'invariabile sua maniera di esistere cogli altri oggetti fissati nel piano stesso, o nello spazio; e quindi se quello si possa geometricamente esibire.

6. Def. iv. Gli oggetti fissati nel piano, o nello spazio, da' quali risulta il sito di un altro, diconsi i *determinanti* del sito di questo.

CAPITOLO II.

DE' DETERMINANTI DEL SITO DE' PUNTI, DELLE LINEE, E DI ALCUNE FIGURE NEL PIANO.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

7. Se nel piano sieno fissati due punti; sarà dato il sito, e la grandezza della linea retta che gli congiugne.

Ciò è manifesto dalle precedenti definizioni 2 e 3, e dal postulato 1. di Euclide.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

8. Se è dato di sito un punto nel piano; sarà anche data di sito, e di grandezza la circonferenza del cerchio, che ha per centro un tal punto, ed un raggio di data grandezza.

Imperocchè non potendosi descrivere, con quel centro ed intervallo, che una sola circonferenza; è chiaro, che questa abbia, per rapporto al suo centro, una determinata maniera di esistere, incomunicabile a qualunque altra circonferenza si descriva col centro stesso; che perciò essa dovrà esser data di sito; e 'l sarà pure di grandezza (*def.2 e 3, e post.3. Eucl.*).

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

9. Se è dato nel piano il sito di due linee, che s' intersegano; saranno anche dati di posizione i punti del loro scambievole incontro.

Ciò è chiaro dalle definizioni 2 e 3; ed è poi stato assunto più volte dall' accuratissimo Enclide ne' suoi Elementi, e da tutt' i geometri nelle costruzioni de' problemi da essi risoluti.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

10. Se nel piano sieno fissati due punti; sarà dato di sito quell' altro punto, che serba distanze date da ciascun di essi.

Poichè essendo date le distanze di questo terzo punto da ciascuno de' fissati; saranno date di sito le circonferenze di que' cerchi, che hanno per centro i punti fissati, e per raggi rispettivi le distanze date (*pr. 2.*), in ciascuna delle quali, com' è chiaro, dee esistere quel terzo punto: che perciò questo sarà uno di que' due ne' quali s' intersegano tali circonferenze; e quindi sarà dato di sito (*pr. 3.*)

11. Cor. Adunque: *Sarà dato il sito di un punto nel piano, per rapporto ad una linea retta in quello stabilita, se tal punto serbi distanze date da ciascuno di due altri fissati in quella linea retta.*

12. Scol. I due punti dati, e le distanze date sono i determinanti del sito di un punto nel piano (*def. 4.*). Que-

ste distanze debbono però esser tali, che i cerchi con esse descritti, e che sono le locali del punto da determinarsi, o s' interseghino, o almeno si tocchino; il che è facile conoscere quando abbia luogo.

In appresso non si farà menzione di questa suscettibilità de' dati, quando essa si rileva con facilità dagli *Elementi*.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

13. Se è dato nel piano il sito di un punto per rapporto ad una linea retta fissata in esso; dovrà esser anche dato: I. il sito e la grandezza della perpendicolare, che da tal punto si tira a quella linea retta; II. il sito della parallela che a questa conducesi per tal punto; III. ed il sito e la grandezza di qualunque altra linea retta s' inclini alla proposta in un angolo dato, e passa pel dato punto.

Part. 1. Imperocchè se, centro il punto dato A [*fig. 1.*], intervallo qualunque AD, (il punto D si suppone preso al di là della retta BC) si descriva il cerchio EFD; saranno dati di sito i punti E, F ne' quali s' intersegano il cerchio e la linea retta (*pr. 3.*); e quindi di sito, e di grandezza la linea retta EF (*pr. 1.*); e perciò di sito il suo punto medio G (*10. El. I.*). Laonde sarà data di sito, e di grandezza la linea retta AG, che unisce i due punti dati A, G (*pr. 1.*), la quale è perpendicolare alla BC (*12. El. I.*).

Part. 2. Inoltre poichè dal punto A non si può tirare alla AG, che la sola perpendicolare AL; perciò sarà dato il sito di questa per rapporto alla AG (*def. 3.*), e quindi per rapporto alla BC, alla quale essa AL è parallela.

Part. 3. Ed inclinandosi da A sulla BC la linea retta AH in un dato angolo ; sarà data quell' unica porzione di cerchio , che si può descrivere sulla AG, da una delle sue parti , capiente un tal angolo (*33. El. III. e def. 3.*) : quindi sarà dato il sito del punto H , ove la circonferenza di tal segmento intersega la BC (*pr. 3.*) ; e perciò la linea retta AH sarà data di sito , e di grandezza (*pr. 1.*) .

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA .

14. Se nel piano sieno fissate due linee rette , le quali s' inclinino scambievolmente ; sarà dato l' angolo che comprenderanno incontrandosi .

Imperocchè preso nell' una di esse BF [*fig. 2.*] un punto E , e da questo abbassata sull' altra CA la perpendicolare ED ; sarà dato l' angolo FED, ch' è complemento di quello che comprenderebbero le rette di sito BF , CA incontrandosi .

15. Scol. Anche la conversa di questa proposizione è vera, cioè , che : *Se due linee rette comprendono un dato angolo ; dovrà l' una esser data di sito per rapporto all' altra* ; vale a dire , che dato il sito dell' una , sarà anche dato quello dell'altra. Poichè nessun'altra linea retta pel vertice di quell'angolo, e verso la parte stessa , per rapporto ad un de' lati di esso , ov'è l' altro lato, può comprendere con quello l' angolo stesso , che vi comprendeva questo.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

16. Se nel piano sieno fissate due linee rette che s' interseghino; sarà dato il sito di ogni punto, di cui è data la distanza da ciascuna di esse.

Sieno AC, AB tali linee rette [*fig.3.n.1.*], e dal punto dato A, ove s' intersegano, s' intendano tirate ad esse rispettivamente le perpendicolari AD, AE, la prima uguale alla distanza, che un punto si suppone serbare dalla AB, l' altra a quella che lo stesso serba dalla AC; saranno dati di sito i punti D, E (*11. El. I, e def. 3.*). Laonde anche di sito saranno date le parallele DM, EN tirate per que' punti alle AB, AC rispettivamente (*pr. 5. parte 2.*); e perciò sarà dato per rapporto alle AB, AC il sito del punto P, ove queste s' intersegano (*pr. 3.*), il qual punto è il proposto.

17. Scol. 1. Le rette AB, AC essendo indefinite da' due versi, e le perpendicolari AD, AE ad esse rispettivamente potendo esser tirate al di sopra, o al di sotto, danno luogo per ognuna di quelle a due parallele indefinite; da che si veggono risultare quattro punti P soddisfacenti ciascuno alla medesima condizione delle distanze assegnate dalle AB, AC, come la figura ne indica. E volendo specialmente definire l' un di essi, bisognerà dinotare in quale de' quattro angoli delle rette AB, AC che s' intersegano debba trovarsi.

18. Scol.2.Se l'angolo delle AB, AC fosse retto, le AD, AE verrebbero ad esser tagliate vicendevolmente sulle AC, AB; ond' è che l' esibizione del punto proposto riuscirebbe più semplice: che perciò quante volte le due linee rette ad angolo, alle quali si rapporta un punto di cui si vuole esi-

bire il sito, si possono prendere ad arbitrio, giova prenderle ad angolo retto.

19. Def. v. Le due rette di sito AB, AC poste ad angolo, cui si riferisce il sito de' punti esistenti nel piano di esse, diconsi *assi*, o *direttrici* di quel punto; e si dà loro il nome di *ortogonali*, o *obbliqui*, secondo che comprendano un angolo retto, o pure obbliquo.

20. Scol. Or nel caso che sieno ortogonali [*fig.3.n.2.*] è chiaro, che tanto sia la distanza PY di un punto P dall'asse AC, quanto la AX, che sull'altro asse AB corrisponde all'estremo X della perpendicolare tiratagli dallo stesso punto P. Sicchè si vedrà esser anche dato il sito del punto P in un piano, se conoscasi la sua distanza da una retta di sito AB, nel piano stesso, e quella del punto ove tal distanza l'incontra da un altro punto A dato in essa. E lo stesso avrebbe luogo, se essendo obbliqui gli assi AB, AC [*fig.3. n.1.*], le PY, PX si supponessero parallele rispettivamente ad essi (*pr. 5. n. 3.*).

21. Queste AX, A*x* [*fig.3.n.2.*], che in un degli assi AB corrispondono dal punto A, intersezione di essi, agli estremi delle parallele all'altro asse tirate da' punti P, *p*, *ec.*, si dicono *ascisse* per questi punti, e le PX, *px*, *ec.* le corrispondenti ordinate, ed insieme considerate l'ascissa ed ordinata per ciascun punto sogliono dirsi *coordinate* di esso.

Il punto A poi donde cominciansi a contar tali ascisse, si dice *principio delle ascisse*, o anche *origine delle ascisse*.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

22. Una linea curva segnata in un piano sarà data di sito, se sia dato di sito ciascun punto di essa rispetto a due assi, o direttrici assegnate in tal piano.

Ciò è chiaro dal teorema precedente, e dalla *def. 3.*

23. Scol. Nel presente teorema abbiamo supposta la curva come non definita, cioè comunque segnata nel piano; che se per ciascun suo punto fosse stabilita una costante relazione tra l' ascissa e la corrispondente ordinata, in tal caso non solamente rimarrebbe assegnato il sito di essa; ma anche la sua natura risultante da questo rapporto; ed essa potrebbesi anche descriver nel piano con un movimento continuo, senza assegnarla punto per punto.

Così se, *p.e.*, fosse stabilito, che le ordinate PX, *px*, *ec.* [*fig. 3. n. 2.*] corrispondessero inversamente alle ascisse AX, A*x*, *ec.*, la curva de' punti P, *p*, *ec.* sarebbe un' iperbole tra gli assintoti AB, AC; ed assegnato il punto P di essa, potrebbe facilmente descriversi (*Sez. con. pr.9.IV.*).

Ma queste considerazioni appartengonsi di proposito alla *Geometria analitica*, ed alla teorica delle curve, per assegnarne le proprietà, e per risolvere su di esse i problemi, che vi si possono proporre.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

24. Se nel piano, sieno dati tre punti; sarà dato il sito, e la grandezza di quel triangolo, che si ottiene congiugnendoli: e sarà di più data la sua specie, *cioè gliesene potrà costituire un altro simile*.

Imperocchè le rette che congiungono que' tre punti sono date di sito, e di grandezza (*pr. 1.*); e però il triangolo che ne risulta sarà dato di sito, e di grandezza. Ed essendone pur dati gli angoli (*pr. 6.*) esso sarà dato di specie.

25. Con. Adunque: *Sarà dato di sito, di grandezza e di specie quel rettilineo, che risulta dal congiugnere più punti dati in un piano, tre de' quali non sieno mai per dritto, ciascuno una sola volta con un altro*. Poichè si è dimostrato, che di sito, grandezza, e specie sono dati que' triangoli ne' quali un tal rettilineo si divide.

Scolio generale.

26. Le poche verità che si sono stabilite sulla teorica del sito nel piano de' punti, delle linee, e di quelle figure di cui trattasi negli Elementi di Geometria Piana, sono sufficienti a far acquistare un' esatta nozione del sito nello spazio, di cui or ora passeremo ad occuparci; che però eccederemmo inutilmente il nostro scopo rapportandone altre, che da queste si derivano, e che sono necessarie ad apprendersi da coloro, che volessero occuparsi con successo della soluzione de' problemi così detti di sito, difficili a risolversi con l'antica analisi; ma molto più riluttanti a' metodi de' moderni, che spesso riescono infruttuosi.

CAPITOLO III.

DE' DETERMINANTI DEL SITO DE' PUNTI, DELLE LINEE RETTE, E DEGLI ANGOLI NELLO SPAZIO.

27. Finora si è veduto il modo da esibire il sito di alcuni oggetti geometrici nel piano, conviene ora passare ad assegnar quello di definire il loro sito nello spazio; e questo problema è più difficile del precedente, perchè lo spazio non potendosi rappresentare in rilievo, o almeno non conducendo ciò fare a' bisogni delle arti, conviene ritrovar espedienti, per avere in disegno sopra un foglio di carta, o sopra una stess' aja i determinanti del sito di quelli oggetti geometrici, che debbono risultar dati nello spazio.

28. Def. v. Per *projezione* di un punto sopra un piano intendesi l' incontro con esso della perpendicolare abbassatagli da quel punto; ed il piano prende nome di *piano di projezione*. Quell' incontro suol dirsi *piede* della perpendicolare: e la grandezza di questa dicesi *altezza* del punto sul piano; poichè in effetto essa misura la distanza di quello da questo.

29. Cor. *Tutt' i punti della perpendicolare ad un piano hanno su questo la stessa projezione.*

30. Def. vi. un piano ad angolo con un altro si dirà *abbattuto* con questo, se giri tanto intorno alla loro comune sezione, che giunga a formare con esso un piano solo.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

31. Le projezioni di tutt' i punti di una linea retta, sopra un piano, sono allogate in un' altra linea retta.

Imperocchè tutte queste projezioni vengono ad essere allogate nell'intersezione del piano di projezione, con quell'altro perpendicolare ad esso, che passa per la linea retta (*38 El. XI.*); e quindi in un' altra linea retta (*3.El. XI.*).

32. Cor. 1. *Tutte le linee rette tirate in un piano perpendicolare ad un altro, hanno, per loro comune projezione su questo, l' intersezione di tali piani. E quel piano suole ordinariamente dirsi* piano projettante *delle linee rette, che in esso tiransi.*

33. Cor. 2. *Per determinare le projezioni di una linea retta sul piano, basta determinare sopra questo le projezioni di due punti di essa.* Adunque:

34. Def. vii. La linea retta che unisce sul piano le projezioni di due punti esistenti nello spazio, è la projezione su tal piano della linea retta, che passa per que' punti.

35. Cor. Quindi: *Se la linea retta da projettarsi sopra un piano è perpendicolare a questo; la sua projezione sopra esso sarà quel punto ove l' incontra.*

36. Def. viii. La linea retta si dirà *parallela al piano*, s' è parallela alla sua projezione su questo.

37. Cor. 1. Adunque: *Se per un punto, ch' è nel piano, si tiri la parallela ad una linea retta ad esso parallela; la linea retta tirata dovrà giacere nel piano.*

38. Cor. 2. *Una linea retta terminata parallela al piano adegua la sua projezione su questo.*

39. Scol. E facile avvertire, che il concetto della precedente definizione possa estendersi, e quindi aversi una linea retta per parallela al piano, s' essa è parallela a qualunque linea retta tirata in questo.

Scolio generale.

40. Per le seguenti ricerche supporremo stabilito un piano nello spazio come termine di rapporto degli oggetti geometrici, che in questo si vogliono fissare, cioè de' quali si vuol determinare il sito. Una tal supposizione non è immaginaria, ma reale: poichè in natura si può sempre prendere per questo piano l' orizzonte di un dato luogo della terra. Quel tal piano suole perciò chiamarsi *orizzontale*; e dicesi *verticale* ogni altro piano perpendicolare ad esso, e del quale è dato il sito, com' è chiaro, se è data semplicemente la sua comune sezione col piano orizzontale. Parimente si dovrà avere come un piano fissato nello spazio, e che si potrà perciò anche prendere come termine di rapporto degli oggetti, che si vogliono in questo rappresentare, ogni altro piano di cui è data la comune sezione col primo, e l' angolo in cui s' inclina quello a questo.

Inoltre la projezione di un punto, ch' è nello spazio, sul primo di tali piani, si dice *projezione orizzontale*; e s' essa è sul piano verticale, si chiamerà *projezione verticale*.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

41. Se è data la projezione di un punto, ch' è nello spazio, sopra un piano di sito, e l' altezza di esso su questo; sarà dato il sito del punto.

Imperocchè un tal punto non potrà essere, se non quel solo rappresentato dall' estremo della perpendicolare tirata al piano di sito dalla projezione data in esso, ed uguale all' altezza data; che perciò dovrà esser dato di sito *(def.3)*.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

42. É dato il sito di un punto nello spazio, se ne sono date le projezioni su due piani, che s' incontrano.

Rappresenti A [*fig. 4.*] un punto di cui sieno date le projezioni a, a' su i piani LN, LP, che s' intersegano nella linea retta LM. È chiaro che se per le Aa, Aa', che sono le altezze rispettive di quel punto su que' piani di projezione, s' intenda passare un piano, questo dovrà esser perpendicolare a' due LN, LP *(18. El. XI.)*; e quindi le sue comuni sezioni A'a, A'a' con questi, dovendo essere anche perpendicolari alla LM *(19. El. XI.)*, comprenderanno l' angolo d' inclinazione dell' un piano all' altro *(def.6 El. XI.)*. Adunque nel quadrilatero A'aA'a' saranno dati tutti gli angoli, e di più i lati A'a, A'a' intorno ad un di questi: che perciò esso potrà geometricamente esibirsi; ed in tal modo verrà ad esibirsi la Aa, o la Aa', cioè l' altez-

za del punto A sopra uno de' piani di projezione. Laonde tal punto dovrà esser dato di sito (*pr. 11*).

43. Cor. 1. Se mai i piani di projezione LN, LP fossero ortogonali, in questo caso sarebbe retto l'angolo $aA'a'$, e quindi un rettangolo la figura $AaA'a'$; adunque sarà Aa uguale ad $a'A$, ed $A'a'$ uguale ad aA, cioè: *L'altezza del punto A sopra uno de' piani ortogonali di projezione, è quanto la perpendicolare, che dalla projezione di esso sull' altro di tali piani si abbassa sulla comune sezione loro*. Laonde in questo caso resta facilitata moltissimo l'esibizione del dato punto da' suoi determinanti espressi nel presente teorema: e però è questa l'ordinaria posizione de' piani di projezione, che assumesi nelle arti del disegno. Noi però trattando la dottrina de' siti in forma puramente geometrica, abbiamo dovuto considerar le teoriche de' determinanti di essi generalmente, e però per due piani qualunque, dalle quali facilmente discendesi al caso particolare per le arti; e quando avvenisse, che in questo caso la costruzione potesse ricevere una modificazione anche maggiore di quella che regolarmente derivasi dalla soluzione generale, non abbiamo tralasciato di recarvela.

44. Cor. 2. Se i punti A, C sieno ugualmente alti sul piano di projezione LN, anche le loro projezioni a', c' sull' altro di tali piani dovranno essere ugualmente alte sulla LM: che perciò la retta $a'c'$ che le unisce sarebbe parallela ad essa LM; vale a dire, che: *Se una linea retta è parallela all' un de' piani ortogonali di projezione; la sua projezione sull' altro di questi, è parallela alla comune sezione loro*.

45. Scol. 1. Volendosi trasportare la projezione a'' [*fig. 5.*] di un punto A, da un piano NP obbliquo al piano LN, su cui del punto stesso n' è data l'altra projezione a, ad un piano LP perpendicolare a questo; bisognerà prima determinare la Aa, per mezzo della costruzione espo-

sta nel teorema, ed indi tirare da a la aA' perpendicolare alla LM comnne sezione de' piani LN, LP, poi elevare ad essa LM, dal punto A' e nel piano LP, la perpendicolare $A'a'$ uguale alla Aa; sarebbe a' la projezione cercata.

46. Scol.2. Che se la projezione a'' del punto A voglia-si trasportare, dal piano NP obbliquo all' altro LN, snll' altro piano LP che s' inclini allo stesso LN in un angolo dato Q: biso guerà anche determinar prima la Aa, tirare da a alla ML, intersezione di questo secondo piano di projezione con lo stesso LN, la perpendicolare aA'; ed indi presa in un lato dell' angolo Q la QR nguale a questa aA', condurgli dal punto R la RS quanto la aA, e dal punto S tirare all' altro lato dell' angolo stesso la perpendicolare ST: si comprenderà facilmente, che se dal punto A' si tiri alla ML, nel piano LP, la perpendicolare $A'a'$ nguale alla QT; il punto a' sarà la projezione del punto A su questo piano.

Ed ognuno potrà vedere dal già detto in qnesti dne scolj, e nella def. 7., in qual modo si possa trasportare da nn dato piano di projezione sopra un altro la projezione di una linea retta.

47. Cor. Da' dne scolj precedenti si ricava anche il modo, onde data la projezione di nn punto sopra un piano, e la sua altezza su questo, si possa determinare la projezione di un tal punto sopra un altro piano ad angolo con quello.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

48. È dato il sito di un panto nello spazio, se sono date le distanze, ch' esso serba da tre piani che s' incontrano scambievolmente in dati angoli.

Imperocchè essendo date le distanze Aa, Aa'' [*fig. 5.*],

che il punto proposto A serba da' due piani LN, NP i quali s' inclinano in un angolo dato; nel quadrilatero $AaA''a''$, che si ottiene tirando dalle projezioni a, a'' del punto A su que' piani, le perpendicolari aA'', $a''A''$ alla loro comune sezione NM, ed intendendo congiunte le Aa, Aa'', saran dati tutti gli angoli, ed i lati dintorno all' angolo A''; che perciò esso si potrà geometricamente descrivere, e quindi sarà data la aA''. Similmente si dimostrerà, ch' essendo date le distanze Aa, Aa', che lo stesso punto A serba da due altri piani dati NL, LP sia pur data la aA'. Adunque saranno date le distanze che il punto a serba dalle due linee rette ad angolo MN, ML; e quindi sarà dato il sito di un tal punto nel piano LN (*pr. 7.*). Laonde del punto A, ch' è nello spazio, n' è data la projezione a su di un piano LN di sito: è poi anche data l' altezza aA di esso su tal piano; perciò il suo sito sarà dato (*pr. 11.*).

49. Cor. Dalla *determinazione* del presente teorema si rileva, che: *Se sono date le distanze che un punto nello spazio serba da due piani che s' inclinano in un angolo dato, saranno anche date le distanze, che le projezioni di que' punti su questi piani serbano dalla loro comune sezione.*

50. Scol. 1. Se i piani LMP, LMN, PMN suppongansi ortogonali, l' angolo solido M sarà quello di un cubo, e le perpendicolari Aa', Aa'' pareggeranno rispettivamente le loro projezioni aA', aA'' sul piano LN, l'una delle quali aA'' potrà prendersi sulla comune sezione opposta ML de' piani di projezione, dal punto M, come la MA'; e si vedrà risultar noto il sito del punto A dal conoscersi le MA', $A'a$, aA. Or le tre rette Aa, Aa', Aa'', o le loro corrispondenti MA', $A'a$, aA parallele rispettivamente alle ML, MN, MP diconsi le coordinate del punto A riferito agli assi, o direttrici ML, MN, MP; ed M è il *principio* delle coordinate. Adunque: *É dato il sito di un punto nello spazio, se sono date le sue coordinate rispetto a tre assi ortogonali fissati nello spa-*

zio . E vedesi ancora , che il sarebbe se gli assi essendo obbliqui, le coordinate fossero rispettivamente parallele ad essi.

51. Scol. 2. La riduzione eseguita, per la ricerca proposta nel teorema, di due determinanti del punto dallo spazio nel piano, dando luogo a quattro diverse posizioni del punto su questo (*scol. 1. pr. 7.*) ; sarà facile dedurne , che a quello a determinarsi nel presente teorema di dati gliene corrispondano otto diversi , ciascuno in ciascuno degli angoli solidi de' tre piani di projezione indefiniti.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

52. Se sono date sopra un piano le projezioni di due punti, e le loro altezze rispettive sul piano; sarà dato il sito della linea retta che passa per essi.

Imperocchè sono dati di sito due punti pe' quali essa passa , e per gli quali non ne passa che una sola; che perciò tale linea retta dovrà esser data di sito (*def. 3.*).

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

53. Una linea retta è data di sito nello spazio , se sono date le sue projezioni su due piani che s' incontrano .

In una delle projezioni $a'b'$ [*fig. 4.*] della linea retta nel piano LP prendansi i punti a', b', da' quali si tirino alla LM le perpendicolari $a'A'$, $b'B'$; poi da' punti A' , B' conducansi alla stessa LM , nell' altro piano LN , le per-

pendicolari A'*a*, B'*b*, sino alla projezione *ab* della linea retta stessa in questo piano: i punti *a*, *b* rappresenteranno le projezioni sul piano LN di que' punti della linea retta proposta, che avevano per loro rispettive projezioni sull'altro piano LP le *a'*, *b'*. Adunque essendo date di ciascuno di tali punti le rispettive projezioni su due piani che s' incontrano, ne sarà dato il sito (*pr.12.*); e quindi sarà data di sito la linea retta che passa per essi (*pr. 14.*).

Scolio generale.

54. Si è veduto ne' §§. 41 e 42, 52 e 53 esser determinanti di un punto nello spazio o la sua projezione sopra un piano di sito, e l' altezza su questo; o pur le projezioni su due piani ad angolo: e similmente, che i determinanti di una linea retta nello spazio sono, o le projezioni di due suoi punti sopra un piano, e le loro altezze rispettive su questo; o pur le projezioni di tale linea retta su due piani ad angolo. Or i primi due modi di determinazione, cioè quelli de' §§. 41 e 52, sono da posporsi ai secondi 42 e 53; poichè primieramente questi, e non già quelli danno grandissima facilità nelle costruzioni; e poi se fossero molti i punti dati, a diverse altezze sopra un piano, potrebbe facilmente nel primo modo (41 e 52) prodursi confusione, e scambiarsi l'altezza di un punto con quella di un altro, non esistendo connessione alcuna, nè ordine tra le projezioni di que' punti segnati nel piano di projezione, e le loro corrispondenti altezze esibite a parte. Adunque i geometri, e gli artisti in pratica hanno sempre presi per determinanti del sito di un punto, o di una linea retta nello spazio le loro projezioni su due piani ad angolo; che perciò, ogni qual volta in appresso si dirà dato nello spazio il sito di un punto, o di una linea retta, dovrà intendersi, che ne sien date le loro projezioni su due piani, che s' inclinano in un dato angolo. Siccome poi

riesce più facile ricavare da questi determinanti il sito di tali cose geometriche nello spazio, allorchè i piani di projezione sono ad angolo retto, come si è già veduto di sopra (43), e che altronde tale supposizione non deroga alla generalità delle costruzioni, potendosi nella maggior parte de' casi prender questi piani ad arbitrio; si suole quindi scegliere per essi la posizione ortogonale.

Affinchè però non mancasse in qualche caso il mezzo di fare altrimenti, ed anche per dare a questo argomento geometrico la generalità ad esso propria, abbiamo ne' §§. 42 e 53 esposta la maniera di determinare il sito di un punto, o di una linea retta nello spazio, per mezzo delle sue projezioni generalmente, cioè supponendo che i piani di projezione fossero obbliqui; ed abbiamo di più anche mostrato, in qual modo la projezione di un punto, e quindi quella di una linea retta si possano da un piano obbliquo ad un altro trasportare sopra un piano perpendicolare a questo (46); nè in appresso tralasceremo dare i mezzi convenevoli da eseguire su i piani di projezione obbliqui quelle costruzioni di varj problemi di sito che risolveremo, e che per le ragioni poc' anzi dette, ed anche per metodo eseguiremo sopra piani ortogonali.

55. Di più, dovendosi per gli usi pratici rappresentare le due projezioni in disegno sopra uno stesso foglio di carta, o sopra una medesima aja, si sono perciò determinati gli artisti a supporre *abbattuto* il piano verticale. La projezione verticale è dunque sempre disegnata sopra un piano in continuazione coll' orizzontale; e per farsi un' idea dell' oggetto disegnato bisogna immaginare, che una convenevol rivoluzione in senso contrario a quella, che il piano verticale ha dovuto fare per abbattersi, lo rimetta nel suo primiero sito. Ciò posto, per distinguer bene il piano orizzontale dal verticale abbattuto con esso, si suole segnare con una linea più forte la comune sezione de' piani di projezione nel disegno.

Così la projezione verticale *a'b'* di una linea retta AB [*fig. 4.*] esistente nello spazio, non si esegue realmente sul piano verticale PQLM nel suo vero sito; ma sì bene sull' altro P'Q'LM, che rappresenta quello abbattuto coll' orizzontale LMNO. Una tal disposizione, indipendentemente dalla ragione poc' anzi addotta, e dalla facilità di esecuzione che dà al disegno, ha ancora il vantaggio di abbreviare la determinazione delle projezioni. Supponendo in fatti, che i punti *a*, *a'* sieno le rispettive projezioni del punto A sopra i piani LN, LP, è chiaro, che le perpendicolari tirate da esse alla comune sezione LM de' piani di projezione, le quali debbono concorrere in uno stesso punto A' di questa, continuando ad avere un tal sito per rapporto alla LM, anche quando il piano verticale si è abbattuto, verranno a formare una sola linea retta. Vale a dire, che: *Essendo data la projezione di un punto in uno de' piani di projezione; la sua projezione sull' altro di questi abbattuto col primo esisterà nella perpendicolare indefinita, che dalla projezione data tirasi alla comune sezione di que' piani.* E perciò se quest' altra projezione dovesse anche esistere in una linea retta di sito tirata in quest' altro piano, essa sarebbe quel punto, ove una tale linea retta è incontrata da quella perpendicolare.

Tutto ciò che in questo §. si è detto pe' piani ortogonali di projezione, si deve intendere anche quando sieno obbliqui.

56. Bisogna inoltre avvertire, per la chiara intelligenza delle seguenti costruzioni, che a fine di rendere più concepibili in disegno le diverse parti di ognuna di esse, e talvolta anche per rendere più agevole la maniera di esprimerle, adopreremo le lettere majuscole A, B, *ec.* ad indicare i punti esistenti nello spazio, e queste segnate con una virgoletta superiore a destra, che suol dirsi *apice*, come A', B', *ec.* dinoteranno i punti allogati nella comune sezione de' piani di projezione. Inoltre i punti esistenti nel piano orizzontale saranno dinotati colle lettere piccole *a*, *b*, *ec.*; e quelli che

trovansi nel piano verticale, dalle stesse con un apice, nel seguente modo a', b', *ec.*; ed ogni punto nello spazio, e le sue projezioni, come anche quell'altro in cui la linea retta che unisce queste intersega la comune sezione de' piani di projezione, quando l' uno si suppone abbattuto coll' altro, verranno sempre contrassegnati da una stessa lettera variata però nella guisa poc' anzi detta; in modo tale, che se quel punto era dinotato con A, le sue projezioni saranno espresse da a, a', e da A' l' intersezione della retta aa' con la LM.

Finalmente ad oggetto di render meno complicate le figure, e più intelligibili le soluzioni, si è sempre supposto, che ciò che deve aver luogo in ciascun problema succeda in un solo de' quattro angoli de' piani di projezione indefiniti; la quale supposizione nulla detrae alla generalità di esibizione del quesito, e non toglie i mezzi da far diversamente, quando ciò non si avverì.

E per la stessa ragione abbiamo tralasciato, nelle presenti ricerche, le esibizioni diverse del dato per conseguenza, cui si può pervenire per la diversa disposizione che si assegni a' dati per concessione, relativamente a' medesimi assi coordinati. Nè tampoco il faremo ne' problemi, che dovremo risolvere nel presente trattato; potendosi ciò supplire facilmente, senza dar luogo ad inutili lungherie.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

57. Date le projezioni di una linea retta su due piani che s' incontrano; saranno determinabili i punti ov' essa gl' incontra.

Cas. 1. Dinoti LM [*fig. 6.*] la comune sezione de' piani di projezione, che suppongansi primieramente ortogona-

li, ed *ac* sia la projezione orizzontale di una linea retta, ch'è nello spazio, la quale projezione incontri la LM in B′,*a′b′* ne sia verticale. Dovrà una tale linea retta esistere nel piano verticale che passa per *ac* (*pr.10.*); che perciò essa dovrà incontrare l' altro piano di projezione nella perpendicolare B′*b′* tirata dal punto B′ alla LM, nel piano verticale; poichè questa perpendicolare viene ad essere la comune sezione del piano verticale di projezione col poc' anzi detto piano verticale in cui esiste la linea retta proposta (*19.El.XI.*). Ma questo punto d' incontro dee trovarsi anche nella *a′ b′*; mentre quella linea retta, e questa sua projezione esistono in un piano stesso. Adunque il punto cercato sarà l' intersezione *b′* della B′*b′* colla *a′b′*. E similmente se dal punto C′ ove la linea retta *a′b′* incontra la LM si tiri a questa la perpendicolare C′*c*, nel piano orizzontale, il punto *c* ove siffatta perpendicolare intersega la *ac* sarà l' incontro della linea retta proposta col piano orizzontale.

Cas. 2. Sieno ora obbliqui i piani di projezione LN, LP [*fig. 7.*]. E poichè il punto ove la linea retta proposta incontra uno di tali piani LP dee ritrovarsi non solamente nella projezione *a′ b′* di tal linea retta su questo piano, ma anche nella comune sezione del piano stesso coll' altro perpendicolare ad LN condotto per *ab*, nel quale la linea retta proposta esiste (*pr.10.*); dovrà perciò quel punto d' incontro esser l'intersezione di questa comune sezione colla *a′b′*. Non dee dunque farsi altro, che mostrare come possa determinarsi questa comune sezione. A tal uopo si prenda nella LM un punto E′ ad arbitrio, e da esso gli si conducano le due perpendicolari E′*e*, E′*e′*, ne' due piani LN, LP rispettivamente, e la prima di queste si produca fino alla *ab*, l' altra s'intenda prolungata fino ad incontrare in *e′* la comune sezione che si vuol determinare. Ed essendo il piano *e*E′*e′* perpendicolare alla LM (*4.XI.*), e quindi al piano LN(*18.XI.*) al quale è anche perpendicolare quell' altro che si è suppo-

sto passare per la *ab*; dovrà la loro comune sezione *e'e* esser anche perpendicolare allo stesso piano LN (*19. XI.*); che perciò l' angolo *e'e*E' è retto. Laonde nel triangolo rettangolo *e'e*E' essendo dato l' angolo *e*E'*e'*, ch' è l' inclinazione de' piani LN, LP, ed il lato E'*e*, si potrà esso geometricamente costruire, e quindi si esibirà la sua ipotenusa E'*e'*. Adunque si farà noto nel piano LP un punto *e'* della comune sezione cercata; ma questa dee poi passare anche per lo punto C' ove la *ab* incontra la LM; che perciò essa sarà la C'*e'*; ed il punto *f* ove intersegansi la C'*e'* e la *a' b'* sarà il punto d' incontro della linea retta proposta col piano LP. E similmente si determinerebbe l'incontro di essa coll'altro piano LN.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

58. Data la grandezza di ciascuna delle projezioni di una linea retta terminata di sito; sarà anche data la grandezza della linea retta.

Imperocchè sia la linea retta terminata AB [*fig. 4.*], le cui projezioni su i piani LN, LP sieno *ab*, *a'b'*; saranno le A*a*, B*b* perpendicolari al piano LN (*def. 5.*): se dunque tirisi per l' estremo A della AB, che ha minor altezza sul piano LN, la AC parallela alla *ab*; sarà la AC uguale alla *ab* (38), e perciò data. Ma è poi la BC quanto la differenza di altezza de' punti A, B sul piano LN, la qual differenza è data, subito che i punti A, B sono dati di sito (42). Adunqne sarà anche data la AB, ch' è l' ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono le AC, CB.

59. Scol. 1. Se i piani di projezione si supponessero ortogonali; per ottener la differenza di altezza degli estremi

A, B della linea retta proposta sopra uno di tali piani LN, basterebbe tirare per la projezione a' del punto A sul piano LP' la $a'c'$ parallela alla LM; sarebbe $c'b'$ la differenza cercata (43). Adunque in questo caso, se prendasi nella $c'a'$ la $c'h'$ uguale alla ab, e giungasi la $b'h'$; sarà questa quanto la linea retta AB.

60. Scol. 2. Dalla semplice ispezione della figura si rileva, che BA stia ad AC, o ab, come il raggio al coseno dell' angolo d' inclinazione della BA al piano LN della projezione ab, cioè, che: *Una linea retta nello spazio sta alla sua projezione sopra un piano, come il raggio al coseno dell' angolo d' inclinazione di quella a questo;* che perciò si vede anche, come data la grandezza delle projezioni di una linea retta di sito, si possa determinare l' angolo della sua inclinazione a ciascuno de' piani di projezione.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

61. Date di sito due linee rette, che s' intersegano nello spazio; sarà dato il sito del punto di loro intersezione.

Imperocchè un tal punto dovendo ritrovarsi nel tempo stesso in ciascuna di tali linee rette, la sua projezione su l' un piano o l' altro di projezione dovrà essere allogata in ciascuna delle projezioni di quelle linee rette sopra questo; che perciò essa dovrà essere l' intersezione di tali projezioni. Adunque di un tal punto essendone date le projezioni sopra due piani che s' incontrano, ne sarà dato il sito (*pr. 12.*).

62. Cor. Laonde: *La linea retta che si tiri dall' intersezione delle projezioni, sopra di un piano, di due linee rette,*

che s' intersegano nello spazio, all' intersezione delle medesime linee rette sull' altro piano di projezione abbattuto col primo, deve risultar perpendicolare alla comune sezione de' piani di projezione (55).

63. Scol. Che se tale congiungente risulti perpendicolare alla comune sezione de' piani di projezione, non sarà questo un criterio generale da arguirne, che le linee rette proposte nello spazio s' interseghino, come alcuni geometri *descrittivi*, tra i quali il *Lacroix*, han detto; poichè ciò può avvenire senza che queste linee rette s' interseghino nello spazio, ogni qual volta una di tali rette esistesse in un piano perpendicolare a' due di projezione, nel qual caso la congiungente si confonde colle projezioni di questa linea retta. Noi daremo nel cap. IV. un principio generale per conoscere quando, intersegandosi le projezioni di due linee rette su i piani di projezione, s' intersegano anche le linee rette nello spazio.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

64. Dati di sito i lati di un angolo piano; questo sarà dato di grandezza, e di sito.

Sieno *ab*, *ac* [*fig. 8.*] le projezioni de' lati dell' angolo in un de' piani di projezione, *a'b'*, *a'c'* le corrispondenti sull' altro di essi; saran dati i punti *d*, *e* ove tali lati incontrano l' un di cotesti piani (*pr. 16.*), e quindi la *de* (*pr. 1.*). Di più saran date di grandezza le projezioni *a'D'*, *ad* di un lato di quell' angolo, come anche quelle *a'E'*, *ae* dell' altro lato; e quindi la grandezza di questi (*pr. 17.*): ma è pur dato il lato *de*, che lo sottende; la-

onde tal angolo si potrà geometricamente esibire, e perciò sarà dato di grandezza.

Ed essendo dati di sito i suoi lati, e perciò il suo vertice (*pr. 18.*); il sito di esso dovrà esser dato (*def. 2 e 3*).

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

65. Dati di sito i vertici degli angoli di una figura rettilinea, nello spazio; la figura sarà data di sito, di grandezza, e di specie.

Imperocchè le linee rette che congiungono le projezioni date de' vertici degli angoli della figura su ciascun piano di projezione, ognuna con quella che gli è prossima, sono le projezioni de' lati corrispondenti di essa; che perciò questi saran dati di sito; e quindi di sito sarà data la figura da essi terminata (*def. 3.*). Inoltre sarà data la grandezza di que' lati (*pr.17.*), e quella degli angoli compresi (*pr.19.*). Adunque si potrà geometricamente descrivere una figura rettilinea uguale, e simile alla proposta; e quindi questa sarà anche data di grandezza, e di specie.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

66. Un triangolo dato di sito nello spazio sta alla sua projezione sopra un piano di sito, come il raggio al coseno dell' angolo in cui inclinasi a questo il piano del triangolo.

Sia ABC il triangolo proposto [*fig. 9.*], e per l' angolo A

di esso, di media altezza sul piano di sito dato si concepisca tirato a questo un piano NLM parallelo, il quale interseghi il piano del triangolo nella retta AD, dividendolo però nelle due parti ABD, ACD, l'una al di sopra, l'altra al di sotto del piano NLM. Ciò posto, dal vertice dell'altro angolo B di una di quelle s'intenda tirata la perpendicolare BF al piano NLM; da F sulla AD la perpendicolare FE, e congiunte le AF, FD, BE; sarà la BE perpendicolare alla AD, e però l'angolo BEF l'inclinazione del piano del triangolo all'altro NLM, o al proposto parallelo ad esso; ed AFD la projezione del triangolo BAD sul piano NLM, o sul proposto: e risulta pur evidente, che stia il triangolo BAD alla sua projezione AFD, come BE ad EF (*1. VI.*), cioè come il raggio al coseno dell'inclinazione del piano del triangolo al piano NLM, o sia al proposto di projezione. E dimostrando similmente, essere l'altra parte del triangolo, la ADC, alla sua projezione sul piano stesso nella medesima ragione del raggio a quel coseno; risulterà l'intero triangolo ABC alla sua projezione sul piano proposto, come il raggio al coseno dell'angolo in cui il piano di quello inclinasi a questo.

67. Cor. 1. Quindi: *Un qualsivoglia poligono nello spazio starà alla sua projezione sopra un piano di sito, come il raggio al coseno dell'angolo in cui a questo inclinasi il piano del poligono.* Poichè ciascun triangolo in cui dividesi il poligono proposto sta al corrispondente in cui dividesi la sua projezione su quel piano precisamente in questa ragione.

68. Cor. 2. E da ciò potrà anche inferirsi, che: *Una qualunque figura piana nello spazio stia alla sua corrispondente projezione sopra un piano di sito, nella ragione del raggio al coseno dell'angolo in cui a questo piano inclinasi quello della figura.* Poichè può quella concepirsi divisa in triangoli di finita, o infinitesima grandezza, e così corrispondentemente la projezione di essa. Ma noi su di ciò dovremo ritornare in appresso, più convenevolmente dimostrandolo.

CAPITOLO IV.

DE' DETERMINANTI DEL SITO DE' PIANI, DELLE LINEE CURVE CH' ESISTONO IN ESSI, DEGLI ANGOLI SOLIDI, E DE' POLIEDRI NELLO SPAZIO.

69. Def. IX. Dicesi *traccia* di un piano, ch'è nello spazio, la sua intersezione con un de'piani di projezione: e se questi piani sieno uno orizzontale, l'altro verticale, la traccia sul primo di essi prenderà il nome di *orizzontale*, e si dirà *verticale* quella sull'altro.

In generale il nome di *traccia* si dà pure all'intersezione di una qualunque superficie curva con un de'piani di projezione; ed in talune più recenti istituzioni di *Geometria descrittiva* si è ancora così denominato l'incontro di una retta con un de' piani di projezione.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

70. È dato il sito di un piano dello spazio, se sono date le sue tracce su due piani di sito posti ad angolo.

Imperocchè se per una di quelle tracce date si concepisca passare un piano, e questo rivolgersi dintorno a tale linea retta; tra le infinite posizioni diverse ch'esso prenderà nello spazio, dovrà anche passare per l'altra delle tracce date, ed in

questo caso la sua posizione resterà determinata, essendo esso il solo che può passare per queste due linee rette (*2. El. XI.*)

71. Cor. Adunque : *Ogni qualvolta si dirà, che un piano è dato di sito nello spazio, bisognerà intendere, che ne sien date le tracce su due piani di sito posti ad angolo.*

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

72. Se è data una delle tracce di un piano, ed un punto pel quale esso passa; il piano sarà dato di sito.

Dinoti A'*a* [*fig. 10. n. 1.*] la traccia data, e sieno *d*, *d'* le projezioni del punto dato. Si prenda in A'*a* un qualunque punto *b*, dal quale si tiri alla LM, comune sezione de' piani di projezione, la perpendicolare *b*B'; sarà B' la projezione del punto *b* sull'altro piano di projezione, se questi suppongansi ortogonali: che perciò, congiunte le *db*, *d'*B'; saranno queste le projezioni corrispondenti di quella linea retta, che dal punto dato nel piano proposto si tira al punto *b* preso nella sua traccia orizzontale A'*a*. Or una tale linea retta dovendo esistere in siffatto piano, dovrà incontrare l'altra traccia di esso sul piano di projezione verticale; che perciò essendo determinato il punto *c'* ove quella linea retta incontra questo piano di projezione (*pr. 16. cas. 1.*), sarà anche determinata l'altra traccia A'*a'* del piano proposto; e quindi esso sarà dato di sito (*pr. 22.*).

Che se i piani di projezione non sieno ortogonali; allora tirata da *b* [*fig. 10. n. 2*] la perpendicolare *b*B' sulla LM, si descriva sulla B'*b* il triangolo rettangolo B'K*b*, in cui l'angolo *b*B'K rappresenti l'inclinazione de' piani di projezione. Egli è chiaro, che se questi suppongansi nel loro vero sito,

e che il triangolo B'K*b* si concepisca rivolgersi dintorno a B'*b* , finchè il suo piano divenga perpendicolare al piano di projezione in cui esiste la A'*b* ; in tal caso B'K dovrà allogarsi nell' altro piano di projezione perpendicolarmente alla LM , ed il punto K si troverà essere , in questa posizione , la projezione del punto *b* sul piano della projezione *d'*. Adunque quando i piani di projezione si suppongano abbattuti si otterrà tale altra projezione , prolungando la *b*B' in *b'* , finchè sia B'*b'* uguale a B'K; il punto *b'* sarebbe questa projezione. Ed il resto della determinazione si otterrà nel modo stesso del caso precedente, applicandovi però per l'esibizione del punto *c'* il caso 2. della prop. 16.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

73. È dato il sito di un piano, che passa per tre punti dati nello spazio.

Sieno *a* , *b* , *c* [*fig. 11.*] le projezioni de' punti dati sopra un de' piani di projezione , ed *a'* , *b'* , *c'* le corrispondenti sull' altro : si congiungano le *ba* , *ac* , *cb* ; *b'a'*, *a'c'*, *c'b'*, queste congiungenti saranno le projezioni delle linee rette che uniscono i punti dati nello spazio , le quali esistendo nel piano che passa per tali punti , dovranno incontrare i piani di projezione in ciascuna delle tracce di quello su questi . Ma gl' incontri di quelle linee rette co' piani di projezione sono determinabili *(pr.16.)* . Adunque saranno anche determinabili le tracce del piano, che passa per esse; e quindi sarà dato il sito di un tal piano nello spazio*(pr.22.)*.

74.Scol.Per la determinazione di queste tracce non è necessario esibire gl' incontri di tutte le tre linee rette con ciascuno de' piani di projezione , ma basta esibire gl' incontri

e , *d* di due di esse con uno di que'piani , per avere la traccia *ed*E′ su questo ; e quindi , determinando il solo incontro *d*′ di una delle stesse linee rette coll'altro piano di projezione , si avrà l' altra traccia *d*′E′ , nel caso che la già determinata *ed* non siasi trovata parallela alla LM : ed in questo caso si otterrebbe la traccia che passa per *d*′ , tirando anche per questo punto una parallela alla LM ; giacchè : *Se una delle tracce di un piano è parallela alla comune sezione de'piani di projezione, anche l' altra dee esser parallela a tale comune sezione.*

L E M M A.

75. *Tutti que' punti esistenti nel piano di due linee rette di sito poste ad angolo , da ciascun de' quali tirando ad esse le perpendicolari, queste serbansi tra loro una stessa ragione data , debbono essere allogati in un' altra linea retta di sito , che passa per lo vertice di quell' angolo .*

Sieno E , *e* due di tali punti [*fig. 13. n.1 , e 2.*] , e , se è possibile , la linea retta E*e* , che gli unisce , non passi per lo vertice A dell' angolo compreso dalle linee rette di sito AB , AC sulle quali da que' punti sonosi tirate le perpendicolari ED , EF ; *ed* , *ef* , e quindi interseghi una delle linee rette di sito AB nel punto G , l' altra AC in H . E poichè sta ED : EF :: M : N , ed è pure *ed* : *ef* :: M : N ; sarà ED : EF :: *ed* : *ef* , e permutando ED : *ed* :: EF : *ef*. Ma ED : *ed* :: EG : G*e* , ed EF : *ef* :: EH : H*e* . Adunque sarà EG : G*e* :: EH: H*e* ; e dividendo si avrà E*e* : *e*G:: E*e* : *e*H , cioè *e*G uguale ad *e*H ; il che essendo falso , ne segue che la linea retta che passa per gli punti E,*e* , come anche per tutti quegli altri , che hanno la stessa condizione, debba passare per lo punto A.

Ciò premesso , se AF si prenda di data grandezza ; sarà

dato il sito del punto F, e quindi quello della FE, ch'è perpendicolare alla AC nel punto F. Adunque sarà anche dato il punto L, dove questa intersega la AB (*pr. 3.*); e perciò sarà data di grandezza la linea retta FL (*pr. 1.*).

Laonde nel triangolo LED rettangolo in D, essendo ancor dato l' angolo ELD complemento del dato CAB; sarà data la ragione di LE ad ED, che suppongasi espressa da P : M. Ed è poi ED : EF :: M : N; quindi starà LE : EF :: P : N; e per conseguenza sarà dato il punto E nella linea retta di sito FL. Ma è pur dato di sito l' altro punto A; adunque la EA sarà data di sito.

76. Scol. Come il mostra la figura, la locale di cui è detto nel teorema può dividere l' angolo BAC [*fig. n. 1.*], nel qual caso riducesi la ricerca di essa ad assegnare il punto E nella retta FL, sicchè stia LE : EF :: P : N; che può aver sempre luogo, qualunque siesi la ragione di M : N, e quindi l' altra di P : N. Può ancora cadere al di fuori dell' angolo BAC [*fig.n. 2.*]; ma in questo caso dovendo essere ED : EF :: M : N, questa ragione, e però ancor l'altra di P : N, che adegua quella di LE : EF, dovrà esser necessariamente di minore a maggiore.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

77. È dato il sito di un piano nello spazio, se è data una delle sue tracce, e l' angolo d' inclinazione di esso al piano di projezione in cui esiste questa traccia.

Sia A'*a* [*fig.13.*] la traccia data di un piano, che s' inclini a quello di projezione *a*A'L in cui questa esiste, in un angolo dato P.

Cas. 1. Suppongansi primieramente ortogonali i piani di projezione, e per un qualunque punto b della traccia data $A'a$, che supporremo esser l'orizzontale, s'intenda passare un piano perpendicolare ad essa; un tal piano sarà verticale: quindi interseghcrà il piano orizzontale $aA'L$ nella perpendicolare bC', condotta dal punto b alla $A'a$, il piano di projezione verticale nella $C'c'$ perpendicolare alla LM; e finalmente il piano proposto in una linea retta bc', che comprenderà colla bC' l'angolo d'inclinazione di questo piano all'orizzontale, cioè l'angolo dato P; ed il punto c' di concorso delle $C'c'$, bc' si apparterrà alla traccia verticale del piano proposto. Adunque se col centro C' e col raggio $C'b$ si descriva l'arco circolare bD', e nell'intersezione D' con la LM si costituisca l'angolo $C'D'c'$ uguale a P; il punto c' d'intersezione del lato $D'c'$ di questo con la $C'c'$ perpendicolare alla LM si apparterrà alla traccia verticale $A'a'$ del piano proposto; e quindi sarà dato il sito di un tal piano nello spazio (*pr. 22.*).

Cas. 2. Che se i piani di projezione s'inclinino in un angolo dato Q [*fig. 14.*], e sia $A'a$ la traccia data del piano proposto, ed $A'a'$ quella che dee corrispondergli sull'altro piano di projezione. Da un punto c' preso in questa s'intenda tirata al piano di projezione sottoposto la perpendicolare $c'c$, poi dal punto c si tirino alle aA', LM le perpendicolari cb, cC', e finalmente giungansi le $c'b$, $c'C'$. È chiaro, che queste linee rette sieno anche rispettivamente perpendicolari alle $A'a$ ed LM (*18, e 4. El. XI.*); e quindi che l'angolo $c'be$ sia quanto P, e l'altro $cC'c'$ quanto Q (*def. 6. XI.*). Adunque nel triangolo rettangolo $c'cb$ essendo dato l'angolo acuto cbc', sarà esso dato di specie; e perciò sarà data la ragione di $bc : cc'$, che esprimasi per quella di M : R. Similmente nell'altro triangolo rettangolo $c'cC'$ essendo anche dati gli altri suoi angoli, sarà data la ragione di $c'c : cC'$, che si esprima per R : N. Adunque

starà $cb : cC' :: M : N$; e perciò il punto c si appartorrà ad nna linea retta di sito , che dovrà passare per lo punto A' (*lem. pr.*) .

Ciò posto, ecco la determinazione per questo caso . Si esibisca , pel lemma precedente, la locale $A'E$ [*fig. 15.*] di tutti que' punti da ciascun de' quali abbassandosi sulle linee rette di sito $A'a$, $A'L$ le perpendicolari , sieno queste nella ragione di $M : N$, che si è assegnata: poi da un qualsivoglia punto c di essa si tiri alla LM la perpendicolare cC', che sarà data , ed indi al punto c della cC' si costituisca l' angolo $C'cD'$ quanto quello d' inclinazione de' piani di projezione, cioè quanto Q ; la $C'D'$ dinoterà , com' è chiaro , la cc' della figura precedente , e la cD' esprimerà la $C'c'$ nella stessa figura . Laonde se dal punto C' si elevi nell' altro piano di projezione la $C'c'$ perpendicolare alla LM , ed nguale a cD', congiunta la $A'c'$, sarà questa l' altra traccia del piano proposto : che perciò esso sarà dato di sito (*pr. 22.*).

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

78. Dato il sito di un piano nello spazio ; sarà anche data la sua inclinazione a ciascuno de' piani di projezione, ne' quali sono date le tracce di esso.

Cas. In primo luogo i piani di projeziono sieno ortogonali , e preso nella loro comune sezione LM [*fig.13.*] un punto qualsivoglia C' , da questo gli si tiri nel piano della traccia $A'c'$ la perpendicolare $C'c'$ fino all' incontro c' con la traccia $A'a'$, e si conduca sull' altra traccia $A'a$ la perpendicolare $C'b$: congiunta la $c'b$, dovrà esser questa anche perpendicolare alla $A'a$, e quindi l' angolo $c'bC'$ sarà l' inclinazione del piano proposto al piano di projezione ov' è la

sua traccia A′*a* , cioè l' angolo da determinarsi . Adunque , se col centro C′ intervallo C′*b* descrivasi l' arco circolare *b*D′ , e l' intersezione D′ di esso con la LM congiungasi col punto *c*′, risulterà l' angolo *c*′D′C′ dell' inclinazione del piano proposto *a*′A′*a* all' orizzontale . Ed in pari modo si otterrebbe quello in cui esso inclinasi al verticale di projezione .

Cas. 2. Che se i piani di projezione s'inclinino in un angolo dato Q [*fig.14.*] , allora si faccia lo stesso apparecchio del caso 2. della proposizione precedente ; sarà anche l' angolo *c*′C′*c* quanto Q , e l' altro *c*′*b c* dinoterà l' inclinazione del piano proposto *a*′A′*a* a quello di projezione in cui esiste la traccia A′*a* , cioè l' angolo da determinarsi . Or poichè il punto *c*′ nella retta di sito A′*a*′ può prendersi ad arbitrio, si potrà perciò stabilire ad una data distanza dall' altro A′; che perciò quel punto sarà dato di sito ; e quindi sarà data di sito e di grandezza la perpendicolare c′C′ abbassata dal punto *c*′ sulla LM (*pr.5.*) , e di sito il punto C′ ov'essa incontra la LM (*pr. 3.*) . Laonde nel triangolo rettangolo *c*′C′*c* essendo dato l'angolo in C′, e l' ipotenusa *c*′C′, si potrà esso costruire , e quindi si esibiranno i suoi cateti *c*′*c*, *c*C′ : che perciò sarà dato di sito il punto *c* , e di grandezza la perpendicolare *cb* , che da esso tirasi alla retta di sito A′*a* (*pr. 5.*) . Adunque nel triangolo rettangolo *c*′*cb* , essendo dati di grandezza i cateti *c*′*c* , *cb* , esso si potrà costruire , e così resterà determinato l' angolo *c*′*b c* .

Ciò posto, ecco la determinazione per questo caso del presente teorema. Si prenda nella A′*a*′ [*fig. 16.*] un punto *c*′ , dal quale si tiri la perpendicolare *c*′C′ alla LM , e su questa perpendicolare descrivasi il triangolo rettangolo *c*′KC′,in cui l' angolo *c*′C′K sia quanto l' altro Q d' inclinazione de' piani di projezione . Si prolunghi la *c*′C′ in *c* , finchè sia C′*c* uguale a C′K , e dal punto *c* si tiri alla A′*a* la perpendicolare *cb* . Finalmente dal punto *b* si tagli sulla A′*a* la *bd* uguale al-

la $c'K$; congiunta la cd, l' angolo bcd sarà quello nel quale inclinasi il piano dato al piano di projezione in cui esiste la sua traccia $A'a$. E similmente si determinerebbe l' inclinazione del piano dato all' altro piano di projezione in cui è l' altra traccia $A'a'$.

79. Scol. In una maniera analoga a quella de' due precedenti teoremi si potrebbe anche eseguire la determinazione del seguente :

TEOREMA.

È dato il sito di un piano nello spazio, se n' è data una delle tracce, e l' angolo che questa dee comprendere coll' altra.

Imperocchè in tal caso, supponendo essere $A'a'$ [*fig. 14*] la traccia data, ed $A'a$ quella da determinarsi, si potrà, collo stesso artifizio praticato nel secondo caso del teorema precedente, pervenire a determinare il punto c. Ed allora, se costruiscasi un triangolo rettangolo in cui l'ipotenusa sia quanto la $c'A'$, ed uno degli angoli acuti rappresenti l' angolo dell' inclinazione delle tracce ; il cateto adjacente a questo dovrà esprimere in grandezza la $A'b$; e perciò, se col centro A', e con questo cateto per raggio si descriva l' arco di cerchio xby, la tangente cb condotta a quest'arco dal punto c determinerà il punto b per dove dee passare l' altra traccia.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

80. Se un piano è dato di sito; sarà anche dato di sito ogni punto di esso, di cui sia data una projezione.

Sieno A'*a*, A'*a'* [*fig. 16.*] le traece del piano dato di sito, e nel piano di projezione in cui esiste la A'*a* sia dato il punto *c*, che indichi la projezione di un punto C del piano dato. È chiaro, che abbassandosi da *c* sulla A'*a* la perpendicolare *cb*, e poi intendendosi congiunto il punto C coll' altro *b*; questa congiungente, la *cb*, e la C*c*, ch' è l' altezza del punto C sul piano di projezione *a*A'M comprenderanno un triangolo rettangolo, in cui è dato l' angolo C*bc*, come quello ch' è l' inclinazione del piano dato al piano di projezione *a*A'M (*pr. 26.*), ed è pur dato il cateto *bc*. Laonde costituendo al punto *c* della *cb* l' angolo *bcd* uguale al predetto angolo dato d' inclinazione, l' altro cateto *bd* del risultante triangolo *cbd* rappresenterà l' altezza C*c* del punto C sul piano della projezione data *c*; che però un tal punto C sarà dato di sito (*pr. 11.*)

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA.

81. Dato il sito di due piani che s' intersegano; sarà anche data di sito, e di grandezza la comune sezione loro.

Sieno A'*a*, A'*a'* [*fig.17.n.1.*] le traece dell' un piano, B'*b*, B'*b'* quelle dell' altro, ed *f*, *c'* rappresentino i punti

ove s' intersegano quelle che esistono in uno stesso piano di projezione, e quindi que' punti ove questi piani sono incontrati dalla comune sezione de' piani dati $a'A'a$, $b'B'b$. Ciò premesso, si determini la projezione del punto f, che esiste in uno de'piani di projezione, sull' altro di questi, ed al contrario la projezione di c' sull' altro di essi; e queste saranno rispettivamente i punti F', E' ove la comune sezione LM de' piani di projezione è incontrata dalle perpendicolari tiratele da' punti f', c', nel caso che quelli sieno ortogonali; o pur saranno i punti f', c determinati con la costruzione esibita nel caso 2. della prop. 23, quando essi inclininsi in un dato angolo. È evidente, che nel primo caso le congiungenti $c'F'$, Ef, sieno in sito e grandezza le projezioni della comune sezione de' piani dati $a'A'a$, $b'B'b$, e nel secondo il sieno le cf, $c'f'$. Adunque una tale comune sezione sarà data di sito e grandezza (*pr. 15. e 17.*).

82. Scol. 1. Se l' un de' piani dati fosse perpendicolare ad un di quelli di projezione; la traccia di esso su questo sarebbe la projezione sul medesimo della loro comune sezione; e costruendo l' altra di esse sull'altro piano di projezione, si verrebbe anche ad: *assegnare il sito di una retta esistente in un piano di sito, dall' esserne data una sola projezione.*

83. Scol. 2. Le tracce ab, $a'b'$ [*fig. 17. n. 2.*] dell' un de'piani dati, e quelle cd, $c'd'$ dell' altro di essi suppongansi tutte parallele alla comune sezione LM de' piani di projezione. In tal caso si concepiscano essi intersegati da un piano perpendicolare alla LM, le cui tracce, cadranno nella perpendicolare indefinita condotta a questa da un punto P' in essa; ed i punti p, p'; q, q' ove tale perpendicolare intersega le ab, $a'b'$; cd, $c'd'$ saranno gl' incontri co'piani di projezione delle rispettive comuni sezioni di ciascun de'piani dati con quello che si è condotto. Adunque se espongasi l' angolo P' dell' inclinazione de'piani di projezione, e su di un suo lato prendansi, dal punto P', le Pp, $P'q$ uguali a quelle corrisponden-

ti nell' un piano di projezione alle *ab* , *cd* ; sull' altro lato taglinsi le P'*p'*, P'*q'* uguali alle corrispondenti per le *a'b'*, *c'd'* nell' altro di que' piani : congiunte le *p p'* , *q q'*, queste rappresenteranno nel loro vero sito le intersezioni suddette , e 'l punto K corrisponderà a quello del loro incontro nello spazio , pel quale dee passare la comune sezione de' piani proposti . Ciò posto, se dal punto K della figura descritta si tirino alle P'*p* , P'*q'* le perpendicolari K*k*, K*k'*, queste determineranno , in ciascun piano di projezione , le distanze dal punto P', alle quali debbono corrispondere le projezioni, ancor esse parallele alla LM , della comune sezione de' piani proposti .

Ma noi in appresso tralasceremo le costruzioni particolarissime di taluni casi delle ricerche di sito , che tratteremo generalmente , potendo esse formare un convenevole e vantaggioso esercizio di coloro , che versansi in questo ramo della *Geometria de' siti* .

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

84. Dati di sito due piani che s' intersegano ; sarà dato l' angolo della loro scambievole inclinazione .

Sieno A'*a*, A'*a'* le tracce di uno de' piani dati , B'*b* , B'*b'* quelle dell' altro [*fig. 18.*] ; sarà data di sito , e di grandezza la loro comune sezione (*pr. 28.*) , di cui ne sia *fe* una delle projezioni . Ciò posto , si prenda in *fe* un qualunque punto *h* , cioè prendasi la *fh* di data grandezza , e si tiri per *h* la *chg* perpendicolare ad *f e*, fino alle tracce A'*a* , B'*b* de' piani dati , che esistono in questo piano di projezione : poi si concepisca passare per tale retta un piano perpen-

dicolare alla comune sezione de' piani dati, cioè alla *fe'*, allorchè i piani di projezione si suppongono nel loro vero sito, e sia K il punto ove tal piano incontra quella comune sezione; e quindi *c*K, *g*K le intersezioni del piano stesso con ciascuno de' dati, le quali debbono esser perpendicolari all' intersezione di questi; che perciò l' angolo *c*K*g* ch' esse comprendono rappresenterà l' inclinazione scambievole de' piani dati, e sarà quindi quello da determinarsi. Or supponendo che i piani di projezione sieno nel loro vero sito, è chiaro che nel triangolo *f*A'*e'* essendo dati i tre suoi lati, debba esser pur dato l' angolo A'*fe'* (*22. El. I.*), o sia *cf*K: che perciò nel triangolo *c*K*f* rettangolo in K essendo data l' ipotenusa *cf*, e l' angolo acuto *cf*K, potrà esso costruirsi, e quindi determinarsi la *c*K. Similmente si dimostrerà che sia pur data la *g*K. Laonde nel triangolo *c*K*g* essendo dati i tre lati, si potrà esso geometricamente costruire, e quindi resterà determinato l' angolo *c*K*g*, che cercavasi.

O pure, nella linea retta XT prendansi le parti XQ, QT uguali rispettivamente alle *ch*, *hg*, e dal punto Q le si elevi la perpendicolare QY; indi si applichi dal punto X la XY uguale alla *c*K, congiunta la YT sarà questa uguale alla K*g*, e l' angolo XYT il richiesto.

85. Scol. Nel caso analogo al considerato nello scolio 2 alla prop. prec., è chiaro, che l' angolo cercato sarebbe per l' appunto il *k*K*k'* nella figura costruita per esso.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA.

86. Dato il sito di un piano, e quello di una retta che lo incontra nello spazio; sarà dato di sito il punto dell' incontro.

Sieno aA′, A′a le tracce del piano dato [*fig.19.*] , e de $d'e'$ le projezioni della data retta, per la quale s'intenda passare un piano perpendicolare ad uno di quelli di projezione aA′L . Un tal piano avrà per sua traccia su questo la stessa de , e la sua traccia sull' altro piano di projezione a'A′L dovrà passare per lo punto g' dove è questo incontrato dalla retta data , il qual punto si determinerà per mezzo del primo , o del secondo caso della prop. 16. , secondo che i piani di projezione si suppongano ad angolo retto , o pure obbliquo . Laonde quest' altra traccia sarà rappresentata dalla g' F′ : che perciò essendo dati di sito i due piani a'A′a , g'F′d; dovrà esser data di sito la loro intersezione (*pr.28.*), di cui una delle projezioni cade nella medesima dc , e altra sia la E′f'. Or il punto ove quella retta di sito incontra il piano dato dovendo esistere nell' intersezione de' piani poc' anzi detti , la projezione di esso sul piano della $d'g'$ dovrà cadere nella f'E′ ; ma dee anche trovarsi nella $d'g'$, ch' è la projezione corrispondente della retta data . Adunque quella projezione sarà il punto e' ove s' intersegano le $d'g'$, f'E′ . E poichè l' altra projezione di quel punto d' incontro dee esistere nella dF′ , e nella perpendicolare indefinita , che da e' si abbassa sulla LM (*n.55.*) ; perciò essa sarà il punto e. Laonde il punto d' incontro della retta col piano dato sarà dato di sito (*pr. 12.*) .

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA.

87. Dati di sito un punto, ed un piano; sarà anche data di sito, e di grandezza la perpendicolare , che dal punto tirasi al piano.

Sieno A′a , A′a' [*fig. 19.*] le tracce del piano dato , e

d , *d'* le projezioni del dato punto. E poichè il piano che projetta la perpendicolare al piano *a*A'*a'* sul piano di projezione *a* A'L , dee essere nel tempo stesso perpendicolare a ciascuno di questi (*18. El. XI.*) ; perciò la comune sezione di tali piani , cioè la A'*a* , dovrà esser perpendicolare a quel primo piano projettante (*19. El. XI.*) , e quindi alla comune sezione di esso col piano *a*A'L (*d. 4.El. XI.*), ch'è la projezione su questo piano della perpendicolare proposta ; che perciò dovendo questa projezione passare per *d* sarà essa la perpendicolare *db* , che dal punto *d* si abbassa sulla A'*a* . E similmente si troverebbe, che la projezione di essa perpendicolare sull' altro piano di projezione , sia la perpendicolare *d'b'* abbassata dal punto *d'* alla A'*a'*. Quindi essendo date le projezioni della proposta perpendicolare, essa sarà data di sito (*pr. 15.*) . Laonde sarà anche dato il sito di quel punto ov' essa incontra il piano dato (*pr. 3.*), le projezioni del quale sieno *e* , *e'* : che perciò saranno date di grandezza le projezioni *de*, *d'e'* di tale perpendicolare definita tra il punto da cui parte , ed il piano sul quale si abbassa ; e quindi sarà anche data la grandezza della perpendicolare (*pr. 17.*).

88.Scol. Dalla determinazione del semplice sito della perpendicolare , eseguita nel presente teorema , si ricava che :

Se una retta è perpendicolare ad un piano , ciascuna projezione di quella retta dee esser perpendicolare alla corrispondente traccia del piano .

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA.

89.Dati di sito una retta, ed un punto ; sarà anche dato di sito quel piano , che passa per lo punto dato , ed è perpendicolare alla retta data .

Sieno *ab*, *a'b'* le projezioni della data retta (*fig.* 20.), e *d*, *d'* quelle del punto dato, per lo quale s' intenda tirata nel piano proposto una retta parallela ad uno de' piani di projezione; questa retta dovrà esser non solamente parallela alla sua projezione su tal piano (*def.* 8.), ma anche alla traccia in esso del piano proposto: poichè altrimenti incontrando essa una tale traccia, incontrerebbe il corrispondente piano di projezione, cui si è supposta parallela. Adunque siccome la traccia del piano proposto dee esser perpendicolare alla *ba* (*scol. pr.* 31.), così la projezione della retta proposta sul piano della *ba*, sarà anche perpendicolare alla *ba*: ma dee eziandio passare per lo punto *d*; quindi una tale projezione resterà determinata tirandosi da *d* alla *ba* la perpendicolare *dc*. Inoltre essendosi la retta tirata supposta parallela al piano di projezione in cui è la *ba*, tutti i suoi punti debbono essere ugualmente alti su tal piano; e perciò l'altezza di ciascun di essi è data al pari di quella del punto dato. Laonde per un qualunque di essi, che abbia per projezione sul piano della *ba* il punto *e*, se ne potrà determinare l'altra projezione *e'* sul piano della *b'a'*: quindi sarà anche data su tal piano la *d'e'*, ch'è l'altra projezione della retta che si è supposta tirata (*). Che però sarà determinato il punto *h'* dove tale retta incontra il piano della *a'b'*, per lo qual punto *h'* dovendo passare la traccia corrispondente del piano proposto, questa si otterrà tirando da *h'* la *h'b'* perpendicolare alla *b'a'* (*scol.pr.* 31.). E conducendosi dal punto A', ove questa incontra la comune sezione LM de' piani di projezione, la perpendicolare A'*b* alla *ab*, si avrebbe l'altra traccia di quel piano; che perciò esso sarà dato di sito (*pr.* 22.).

90. Cor. Essendo dato di sito questo piano, e la retta cui

(*) Se i piani di projezione fossero ortogonali, la *d'e'* si otterrebbe tirando per *d'* la parallela alla LM.

è perpendicolare, sarà anche dato di sito il punto ove questa incontra quello (*pr. 30.*). Adunque sarà data di sito, e di grandezza la retta che si condnce dal punto dato a quel punto d'incontro (*pr. 15. e 17.*), la quale è la perpendicolare che dal punto dato si tira alla retta data (*def. 3. El. XI.*). Laonde:

Se sono dati di sito nello spazio una retta ed un punto; sarà data di sito, e di grandezza la perpendicolare, che da quel punto conducesi alla retta.

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA.

91. Dati di sito un piano ed una retta; sarà dato di grandezza l'angolo nel quale questa s'inclina a quello.

Imperocchè nella retta data s'intenda preso un punto, di cui ne rappresenti una delle projezioni il punto *d* [*fig. 21.*], preso ad arbitrio nella projezione *cb* di tale retta, e l'altra sia per conseguenza il punto *d'* ove la perpendicolare *d* D' alla LM incontra l'altra projezione *b'c'* di essa retta: poi da un tal punto sul piano proposto s'intenda abbassata la perpendicolare, le cui projezioni saranno le perpendicolari *d e*, *d'e'*, che si abbassano dalle projezioni corrispondenti del punto preso, sulle tracce A'*a*, A'*a'* del piano dato (*sc. pr. 31*). Sarà dato l'angolo compreso da quell'inclinata e da questa perpendicolare (*pr. 19.*); e perciò anche il proposto, che n'è complemento.

PROPOSIZIONE XXXIV.

TEOREMA.

92. É dato il sito e la configurazione di una linea curva, ch' esiste in un piano dato nello spazio, se sono date le projezioni di essa su due piani che s' incontrano.

Sieno *acb*, *a'c'b'* [*fig.22.*] le projezioni date della curva, ed *f*F' , F'*f'* le tracce di quel piano in cui essa si suppone esistere nello spazio , una delle quali F'*f'* si prenda per suo asse . Or se da un qualunque punto della curva s' intenda abbassata sull' asse F'*f'* l' ordinata corrispondente , è chiaro,che il piano projettante una tale ordinata, sul piano di projezione ove si trova la F'*f'*, essendo perpendicolare a questo , debba la loro comune sezione , cioè la projezione di quell' ordinata, esser perpendicolare alla F'*f'*. Laonde quella projezione potrà rappresentarsi con una qualunque perpendicolare *c'h'* , che da un punto *c'* preso nella *a'c'b'* si abbassi sulla F'*f'* ; e projettando i punti *c'*, *h'* in *c* , H' sull' altro piano di projezione, sarà *c*H' la corrispondente projezione di quell' ordinata: e da tali projezioni determinatane poi la sua vera grandezza (*pr. 17.*) , essa si applichi dal punto *h'* perpendicolarmente alla F'*f'*, nel piano di projezione ove esiste questa linea , è sia *h'*C . Nel modo stesso si potrà determinare una qualunque altra ordinata *k'*E prossima alla precedente , e così in seguito . Adunque se per gli punti C , E si farà passare una linea , questa rappresenterà in configurazione ed in grandezza quella , ch' esisteva nello spazio ; il cui sito sarà anche dato, poichè è dato quello di qualunque punto si prenda in essa .

93. Scol. Se la curva proposta fosse una curva definibile, cioè di nota natura, e descrittibile con moto continuo, se

ne saprebbe il sito, la forma, e la grandezza, determinando il sito di quel numero di punti, che sono necessarj per compiutamente descriverla. Così avendosi le projezioni di una curva circolare, basterebbe determinare tre punti nello spazio, che sono in essa; è bisognerebbe esibirne cinque, se la curva fosse una parabola, un' ellisse, o un' iperbole; poichè per la Geometria elementare, e per la sublime si sa descrivere un cerchio per tre punti dati, o una di quelle altre tre curve per cinque: e siccome per tali punti non può passare che una sola di queste curve, così ognuna di esse resterà pienamente determinata nella sua forma, grandezza, e sito. E si potrebbero anche tali cose più facilmente determinare, quando fosse dato conoscere o il raggio di quel cerchio e il centro di esso, o la grandezza e il sito di due diametri di una di quelle altre curve.

PROPOSIZIONE XXXV.

TEOREMA.

94. Essendo dati di sito nello spazio i lati di un angolo solido contenuto da tre angoli piani; l' angolo sarà dato di sito e di grandezza.

Poichè i lati di un tal angolo solido sono dati di sito, dee esser dato il sito del vertice di esso, ed il sito e la grandezza di ciascuno degli angoli piani che lo comprendono(*pr.19*). Adunque quell' angolo solido dovrà esser dato non solamente di sito (*def. 3.*), ma anche di grandezza, poichè può esibirgliesene uno uguale (*23. El. XI.*).

95. Con. Adunque: *Se fossero dati di sito nello spazio i lati di un angolo solido contenuto da un qualunque numero di angoli piani; sarebbe anche dato il sito, e la grandezza di esso*. Poichè si è dimostrato, che di sito e di grandezza sie-

no dati tutti quegli angoli solidi, ciascuno contenuto da tre angoli piani, da' quali quello è composto.

PROPOSIZIONE XXXVI.

TEOREMA.

96. Se sono dati di sito i vertici degli angoli di un solido poliedro; un tal solido sarà dato di sito, e di grandezza.

Imperocchè essendo dati di sito i vertici degli angoli di un tal solido; saranno dati di sito i suoi lati (*pr. 15.*), le sue facce (*pr. 20*), e gli angoli solidi che gli appartengono (*cor. pr. 35.*). Adunque esso sarà dato di sito (*def. 3.*). Inoltre saranno dati di grandezza que' lati (*pr. 17.*), di specie e di grandezza le sue facce (*pr. 20.*), e di grandezza i suoi angoli solidi (*cor. pr. 32.*): e queste cose come ben si rileva, sono più che sufficienti a poter fare geometricamente esibire un tal solido; che perciò esso sarà anche dato di grandezza.

CAPITOLO V.

APPLICAZIONE DELLE PRECEDENTI TEORICHE ALLA RISOLUZIONE DI ALCUNI PROBLEMI.

PROPOSIZIONE XXXVII.

PROBLEMA.

97. Dato nello spazio il sito di una retta, e quello di un punto; determinare il sito della parallela alla retta condottale per quel punto.

Poichè la retta data, e quella che vuol tirarsi debbono essere parallele tra loro; perciò i piani che le projettano sopra uno stesso piano di projezione dovranno essere anche tra loro paralleli (*6. e 15. El. XI.*); quindi anche parallele saranno le projezioni di quelle rette su questo (*16. El. XI.*). Ma ciascuna delle projezioni della retta cercata dee passare per la corrispondente projezione del punto dato. Adunque le projezioni di questa retta si otterranno tirando in ognun de' piani di projezione, per la projezione del punto dato, la parallela alla corrispondente projezione della retta data.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

PROBLEMA.

98. Dato nello spazio il sito di un piano, e quello di un punto; determinare il sito di quell' altro piano, che pel punto si tira parallelo al dato.

Dovendo il piano da tirarsi esser parallelo al dato; le loro comuni sezioni con ciascuno de'piani di projezione dovranno esser anche parallele tra loro (*16. El. XI.*). Non resta dunque, che a determinare in ciascuno di questi piani di projezione un punto, pel quale deve passare la traccia corrispondente del piano cercato.

Ciò posto sieno A'*a*, A'*a'* [*fig. 23.*] le tracce del piano dato, *d*, *d'* le projezioni del dato punto D, ch'è nello spazio, ed E'*f* dinoti una delle tracce del piano da tirarsi. Dalla projezione *d*, che ritrovasi nel piano stesso della E'*f*, si abbassi sulla A'*a* la perpendicolare *dh*, che sarà anche perpendicolare alla E'*f* nel punto *f* ove l'incontra. Or se dal punto dato D al punto *f* s'intenda condotta la D*f*, è chiaro, che l'angolo D*fd* dinoterà quello in cui inclinasi il piano cercato all'altro di projezione in cui esiste il punto *d*; il qual angolo è dato, del pari che il suo uguale in cui inclinasi il piano dato *a'*A'*a* al medesimo piano di projezione (*pr.26.*). Che perciò, nel triangolo D*fd* essendo dati gli angoli, ed il lato D*d* (*pr. 12.*), si potrà geometricamente esibire il lato *df*. Quindi sarà dato di sito il punto *f*, e per conseguenza sarà data di sito la *f*E', che si tira per questo punto parallela alla A'*a* (*pr. 5. part. 2.*), e ch'è una delle tracce del piano cercato. Or l'altra di esse deve passare per lo punto E', ed esser parallela alla A'*a'*. Adunque ancor questa sarà data di sito; e perciò resterà determinato nel sito il piano che si cerca (*pr. 22.*).

ALITER.

99. Pel punto dato D s'intenda tirata nel piano che si cerca una retta parallela all'un de' piani di projezione *a*A'M; questa retta dovrà essere anche parallela alla traccia del piano in cui si tira, e quindi alla A'*a*: laonde la sua projezione sul piano di questa traccia si otterrà conducendo per *d* la *d*F' pa-

rallela alla A′*a* . Or la stessa retta dovendo avere tutt' i suoi punti ugualmente alti sul piano di projezione *a*A′M , l' altezza di ciascun di loro su tal piano pareggerà quella del punto D : che perciò, per un qualunque di essi , che abbia per projezione sul piano della *d*F′ il punto *e*, si potrà determinare l' altra projezione sul piano della *a*′A′M (*pr.12.*); e quindi sarà data su tal piano la *d*′*e*′, ch' è l' altra projezione della retta supposta tirata. Laonde resterà determinato il punto *f*′, ove essa incontra il piano di projezione *a*′A′M(*pr.16.*), pel quale dovendo passare la traccia corrispondente del piano cercato , si otterrà questa conducendo per *f*′ la *f*′E′ parallela alla A′*a*′ . Finalmente l' altra traccia dello stesso piano sarà la parallela E′*f*, che per E′ tirasi alla A′*a*.

100. Scol. La seconda costruzione del precedente problema riesce assai facile pe' piani di projezione ortogonali ; riducendosi a tirare per una delle projezioni del punto dato D, sia l'orizzontale *d*, la parallela *d*F′, fino alla LM, alla traccia corrispondente A′*a* del piano dato ; elevata da F′ la perpendicolare F′*f*′, fino all'incontro *f*′ con la *d*′*f*′′ parallela alla comune sezione LM de' piani ortogonali, tiratale dalla projezione verticale *d*′ del punto dato ; sarà *f*′′ un punto della traccia corrispondente del piano cercato.

PROPOSIZIONE XXXIX.

PROBLEMA.

101. Date di sito due rette ; determinare il sito del piano condotto per l' una parallelo all' altra .

Sieno *ab*, *a*′*b*′ [*fig. 24.*] le projezioni di quella retta data , per la quale si vuol condurre un piano parallelo all' altra , che ha per projezioni le *cd* , *c*′*d*′ .

Si determinino i punti *a*′ , *b* dove una tale retta incontra i

piani di projezione ; dovranno per questi punti passare le tracce corrispondenti del piano che cercasi ; poichè essa retta deve esistere in questo piano . Ciò posto il punto a' si projetti in a sull'altro piano di projezione , e poi per a', a si tirino le $a'E'$, ae parallele rispettivamente alle projezioni $d'c'$, dc dell'altra retta data; saranno queste le projezioni della parallela tirata nello spazio dal punto a' a questa retta data (*pr.37.*), la quale dovrà incontrare il piano di projezione in cui esiste la cd in un punto della traccia corrispondente del piano cercato. Che perciò, se determinisi il punto e ove tale parallela incontra questo piano di projezione , e poi si congiunga la beF' ; sarà questa una delle tracce del piano da determinarsi : e l' altra sarà per conseguenza la $a'F'$; ond' è che un tal piano sarà dato di sito (*pr. 22.*) .

102. Scol. Da questo problema si può trarre un mezzo generale, e più sicuro per determinare, se intersegandosi le projezioni corrispondenti di due rette ne'piani ove sono projettate , tali rette s' interseghino o no, nello spazio ; e quindi se sieno o pur no in un piano stesso . Poichè è chiaro , che,se conducendosi per una di esse un piano parallelo all'altra, l'incontro di quest' altra con uno de' piani di projezione cade nella traccia del piano tirato, allora tali rette esisteranno in un piano stesso , che sarà precisamente quello che si è esibito , e s' intersegheranno : in caso contrario esse esisteranno in piani diversi, e non s' intersegheranno , quantunque s' interseghino rispettivamente le loro projezioni .

PROPOSIZIONE XL.

PROBLEMA.

103. Ad un punto dato in una retta di sito, la quale esiste in un piano dato , costituire un angolo uguale ad un dato .

Sieno A'*a* , A'*a'* [*fig. 25.*] le traece del piano dato , *cd* , C'*d* le projezioni della data retta , e *d* , *d'* quelle del punto dato ch' è in essa : è chiaro che il punto *c* ove s' intersega la projezione *cd* della retta colla corrispondente traccia A'*a* del piano dato , sia quel punto ove questa retta incontra il sottoposto piano di projezione ; che perciò sarà data di grandezza la retta frapposta tra un tal punto d' incontro e 'l punto dato . Or da questo stesso punto s' intenda tirata la perpendicolare alla medesima traccia A'*a* , avrà questa per sua projezione sul piano di tale traccia la perpendicolare *de* , che dal punto dato tirasi alla A'*a* , e 'l punto *e* sarà quello ov' essa incontra lo stesso piano di projezione . Laonde il triangolo compreso da quell' inclinata , da questa perpendicolare , e dalla *ce* sarà dato di specie e di grandezza ; e quindi si potrà determinare l' angolo compreso dall' inclinata data , e dalla *ce* , o A'*a*. Ciò posto sia P l' angolo dato al quale vuol costituirsi l' uguale nel punto dato della retta data , e nel piano dato : si prenda in un suo lato la PQ uguale a quell' inclinata data , ed al punto Q della PQ si costituisca l' angolo PQR uguale a quello compreso dalla stessa inclinata e dalla traccia A'*a* , il quale si è poc' anzi determinato ; le rette PR , QR concorreranno in R , e determineranno così la QR , alla quale se taglisi sulla A'*a* dal punto *c* l' uguale *cf* , e che poi il punto *f* congiungasi col dato nella data retta , si sarà costituito in esso punto di questa retta , e nel dato piano, l' angolo dato P : il che chiaramente si rileva . E la projezione dell' altro lato di un tal angolo sul piano *a*A'M sarà la *fd* , e quella sull' altro piano di projezione si otterrà , com' è noto , projettando il punto *f* in *f'* su di questo , e congiugnendo la *f'd'*.

PROPOSIZIONE XLI.

PROBLEMA.

104. Dato di sito una retta nello spazio; determinare quel piano, che, passando per essa, s' inclini all' un di quelli di projezione in angolo dato.

Si determinino gl' incontri c, b' [*fig. 26.*] della retta data co' piani in cui esistono le sue projezioni cd, $c'd'$; per ciascun di que' punti dovrà passare la corrispondente traccia del piano che cercasi. Ciò posto, il punto b' si projetti in b sull' altro piano di projezione, e sulla $B'b'$ si prenda la $B'f'$ uguale all' altezza del punto b' su questo piano, cioè alla bb' (supponendo i piani di projezione nel loro vero sito); poi al punto f' della $f'B'$ si costituisca l' angolo $B'f'G'$ uguale al complemento di quello in cui deesi inclinare il piano cercato al piano di projezione ove si trova la cd. Finalmente col centro b, intervallo $B'G'$ descrivasi il cerchio hkl, al quale si tiri per c la tangente chA', che sarà data di sito, e quindi anche di sito il punto A': sarà questa la traccia del piano cercato sul piano di projezione della cd; e l' altra traccia sarà perciò la $A'b'$.

Imperocchè (supposto che i piani di projezione avessero il loro vero sito), è chiaro che il piano hbb', e l' altro della projezione cd sieno perpendicolari tra loro; che perciò la ch essendo perpendicolare alla bh comune sezione di essi, lo dovrà esser pure alla hb'; quindi l' angolo $b'hb$ è precisamente quello in cui inclinasi il piano $b'A'c$ al piano della projezione cd *(def.6.El.XI.)*. Ma quest' angolo $b'hb$ apparisce dalla costruzione essere uguale all' altro $f'G'B'$. Adunque il piano $b'A'c$ è il cercato.

105. Scol. Se la retta data fosse stata una delle tracce $A'b'$ del piano dimandato, l'altra di queste $A'c$ sarebbesi rin-

venuta con una costruzione analoga a quella del precedente problema. Ed in tal modo si sarebbe ottenuta la determinazione del teorema, che: *È dato il sito di un piano, se è data una delle sue tracce, e l' angolo in cui esso inclinasi al piano dell' altra traccia.*

PROPOSIZIONE XLII.

PROBLEMA.

106. Dato il sito di un piano, e quello di una retta, ch' è in esso; determinare quel piano, che intersegando il proposto in questa retta, gli s' inclina in un dato angolo.

Sieno A'*a*, A'*a*' [*fig. 18.*] le tracce del piano dato, B'*b*, B'*b*' quelle del piano cercato, ed *fe*, *e*'*f*' le projezioni della retta, che rappresenta la comune sezione di que' piani: i punti *f*, *e*' ove queste projezioni incontrano le tracce A'*a*, A'*a*' del piano dato, saranno ad un tempo que' punti ove la retta data incontra i piani di projezione, e quelli pe' quali debbon passare le rispettive tracce del piano che cercasi. Ciò posto, per un punto qualunque *h* della *fe* si tiri a questa la perpendicolare *ch* nel piano MA'*a*, e poi s'intenda condotto per una tale retta un piano perpendicolare alla retta data nello spazio, che la incontri in K: un tal piano intersegherà il piano dato, e quello che cercasi nelle rette *c*K, K*g*, le quali s' inclineranno l' una all' altra nell' angolo dato P. Inoltre si vedrà, come nella prop. 29, che sien date le K*c*, *f*K; che perciò intendendosi congiunta la K*h*, nel triangolo *f*K*h* rettangolo in K, essendo data l' ipotenusa *fh* e 'l cateto *f*K, sarà esso costruibile, e quindi si potrà determinare la K*h*. Adunque, se descrivasi un triangolo XYQ co' tre lati del triangolo *c*K*h*, e che poi al punto Y della XY, che

corrisponde al punto K della eK si costituisca l'angolo XYT uguale a quello dato in cui inclinasi il piano dato al piano che vuol tirarsi, cioè a P; è chiaro, che la YT intersegando la XQ debba segnare la QT uguale alla gh, cioè alla perpendicolare alla ef in h, prolungata fino alla traccia del piano dimandato; che perciò questa sarà data al pari di quella; e quindi si avrà nel piano MA'a un altro punto, oltre f, pel quale deve passare la traccia corrispondente del piano che vuol tirarsi. Laonde questa traccia sarà la fB'; e quindi l'altra dovrà essere la eB'.

PROPOSIZIONE XLIII.

PROBLEMA.

107. Dato un angolo, e l'inclinazione de' suoi lati ad un piano; costruire la projezione di quell'angolo su questo piano.

Prendasi il punto A' [*fig.* 27.] per la projezione del vertice di quell'angolo su questo piano, ed A'B' per quella di un suo lato. E poichè ne' dati di questo problema non s'include sito, ma sola grandezza di essi; perciò si potrà supporre, che il vertice dell'angolo proposto stia a qualunque altezza sul piano della projezione A'. Si supponga perciò passare per la A'B' un piano verticale, il quale si concepisca abbattuto, e nella perpendicolare A'a' tirata, in questo piano alla LM, si prenda un qualunque punto a', il quale dinoti il vertice di quell'angolo. Inoltre dal punto a' s'inclinino alla LM le rette a'B', a'C' sotto gli angoli ne' quali i lati del proposto angolo si suppongono inclinarsi al piano su cui vuol esso projettarsi: potrà a'B' dinotare effettivamente l'uno di tali lati, e l'altro dovrà essere dinotato nella sola lunghezza dalla a'C'; poichè è chiaro, che tutte le

rette, che dal punto a' s' inclinano al piano ove esiste la projezione A' di quel punto, in uno stesso angolo, debbono esser lati del cono retto, che si genera dal triangolo a'A'C' rivolgendosi intorno al cateto a'A'. Che perciò, se descrivasi il cerchio Cef', quell'altro lato, nel suo vero sito, dovrà incontrare in un punto la circonferenza C'ef. Per determinare un tal punto, basterà costituire un triangolo co' lati B'a', C'a', che comprendano l' angolo dato che si vuol projettare: è manifesto, che se col centro B', intervallo il terzo lato di tal triangolo, cioè quello che sottende quell'angolo dato, si descriva nel piano del primo cerchio l' altro $g\,e\,h$; il punto e ove s' intersegheranno le due circonferenze sarà il cercato: ed esse si dovranno intersegare, come lo mostrano i dati del problema. Laonde congiugnendo la A'e si avrà l' angolo e'A'B', che sarà la dimandata projezione dell' angolo dato.

108. Scol. 1. Al problema proposto si riduce immantinente quest' altro: *Dati gli angoli che comprendono due rette fra loro, e colla perpendicolare che dal punto ove s' incontrano si abbassa su di un piano dato; determinare su questo la projezione di quel primo angolo*. Poichè è chiaro, che gli angoli che formano i lati dell' angolo dato colla perpendicolare, sono rispettivamente i complementi di quelli sotto cui essi s' inclinano al piano dato; che perciò questi saranno anche dati: e la costruzione del presente problema diventa la stessa di quella del precedente. Ed essa si sarebbe anche potuta effettuare senza tale riduzione, costituendo al punto a della A'a' gli angoli A'a'B', A'a'C uguali rispettivamente a quelli compresi da' lati del proposto angolo e dalla perpendicolare al piano dato, e continuando nel resto precisamente come nel precedente.

109. Scol. 2. Il problema enunciato nello scolio precedente può avere un uso geometrico nel determinare l'inclinazione de' piani in cui esistono due de' tre angoli piani dati

comprendenti un angolo solido, non essendo altro una tale inclinazione, che la projezione del terzo angolo su di un piano, cui si supponga perpendicolare il lato comune agli altri due. E siffatto problema, o l' altro quasi identico della proposizione, occorre nelle pratiche geodesiche, conoscendovisi col nome di *riduzione di un angolo all' orizzonte*.

PROPOSIZIONE XLIV.

PROBLEMA.

110. Costituire ad un punto dato in una retta di sito un angolo dato, con un' altra retta, la quale s' inclini all' un de' piani di projezione in un angolo anche dato.

Sieno *ab*, *a'b'* [*fig.28.*] le projezioni della retta data, e *d*, *d'* quelle del punto dato in essa, dal quale si vuol tirare un' altra retta, che comprenda con quella un dato angolo P, e s' inclini al piano di projezione in cui esiste la *ab* sotto l' angolo Q.

Si applichi nell' angolo Q la RS perpendicolare ad un suo lato, ed uguale all' altezza del punto dato sul piano della *ab*, e poi col centro *d*, e col raggio quanto il cateto RQ del suddetto triangolo si descriva il cerchio *cef*: è chiaro, che ogni retta, che da quel punto si conduce ad un qualunque altro della circonferenza di questo cerchio s' inclini al piano di esso sotto l' angolo Q; che perciò bisognerà determinare quella tra queste, che comprende colla data l' angolo P. A tal uopo si determini il punto *h* ove la retta data incontra il piano della *ab* (*pr. 16.*); sarà data di grandezza quella retta, che dal punto proposto si termina ad *h* (*pr. 17.*). Ma è pur data di grandezza la retta che si cerca, la quale è quanto la QS, ed è dato l' angolo che questa e quella com-

prendono . Adunque sarà anche dato il lato opposto a quest' angolo , cioè la distanza del punto *h* dall'altro ove la retta cercata incontra il piano della *ab* in un punto della circonferenza *cfc*. Laonde se col centro *h*, ed intervallo una tale distanza si descriva l'arco *ef* , i punti *e* , *f* soddisferanno al problema , cioè congiunte le *ed* , *ef* ognuna di queste rappresenterà la projezione della retta cercata sul piano della *ab*. E tale retta avrà per projezioni corrispondenti sull' altro piano di projezione la *e'd'* , o la *f'd'*.

ALITER.

111. Si ritrovi il punto *h* ove la retta data incontra il piano della sua projezione *ab* . Ed essendo dati il cateto *hd* , e l' altro che dinota l' altezza del punto dato su questo stesso piano di projezione , resterà determinato l' angolo che la retta data comprende colla *ab* , o sia l' inclinazione sua al piano di questa . Laonde il proposto problema si sarà ridotto al precedente .

PROPOSIZIONE XLV.

PROBLEMA.

112. Esibire le projezioni, e la grandezza della minima distanza di due rette date di sito nello spazio , e che non sieno in un medesimo piano : *cioè , determinare la perpendicolare comune ad esse .*

Una delle rette date abbia per projezione le *ab* , *a'b'* [*fig. 29.*] , e quelle dell' altra sieno le *cd* , *c'd'*. Sieno inoltre A'*h* , A'*h'* le tracce del piano condotto per la prima di esse parallelo all' altra (*pr. 39.*) . È chiaro, che tutte le

perpendicolari a questo piano tirate da' punti di quella retta, che gli è parallela, sieno tra loro eguali; e siccome tra queste deve esser quella, che incontra l' altra retta data, per la quale si è fatto passare il piano, ne segue perciò, che una di esse presa ad arbitrio possa rappresentare in grandezza la minima distanza, che si cerca. Ciò posto prendasi in $c'd'$ un qualunque punto e', il quale si projetti in e nella cd; saranno i punti e, e' le projezioni di un punto preso ad arbitrio nella retta parallela al piano $h'A'h$; e le perpendicolari ef, $e'f$, che da' punti e, e' si tirano rispettivamente alle $A'h$, $A'h'$ dinoteranno le projezioni della perpendicolare, che dal punto di cui quelli sono le projezioni si abbassa sul piano poc' anzi detto (*n.* 88.). Che perciò, assegnate le projezioni g, g' del punto d' incontro di quella perpendicolare con questo piano, le eg, $e'g'$ rappresenteranno in grandezza le projezioni della perpendicolare definita tra il punto preso nella retta, che ha per projezioni le cd, $c'd'$, e il piano $h'A'h$ che gli è parallelo, su cui quella si è abbassata, cioè della minima distaza cercata. Adunque si farà nota la grandezza di questa (*pr.* 17.). Resta ora ad assegnarsi solamente il sito di essa, cioè a determinarsi in una delle rette date il punto donde tirata la perpendicolare all' altra, questa riesca anche perpendicolare alla prima. A tal oggetto, per gli punti g, g' si conducano le gk, $g'k'$ parallele rispettivamente alle cd, $c'd'$; queste gk, $g'k'$ dinoteranno, com' è chiaro, le projezioni dell' intersezione di quel piano che passa per la retta le cui projezioni sono le cd, $c'd'$, ed è perpendicolare al piano $h'A'h$, con questo stesso piano, nella quale intersezione deve anche un tal piano $h'A'h$ essere incontrato da tutte le perpendicolari che si è detto. Laonde i punti k, k', ove le gk, $g'k'$, intersegano le projezioni ab, $a'b'$ della retta ch' è in questo piano, dinoteranno le projezioni di quel punto di esso, e della retta che vi esiste, donde elevata al piano, e quindi ad una tale

retta la perpendicolare, questa incontra l' altra retta data, e gli è anche perpendicolare, cioè, saranno le projezioni del punto di una delle rette proposte, dal quale deve partire la perpendicolare ad esse comuno. Quindi le projezioni di questa perpendicolare nel suo vero sito saranno le perpendicolari kl, $k'l'$ alle $A'h$, $A'h'$ rispettivamente: e le projezioni dell' altro punto ov' essa incontra l' altra retta data, saranno determinate dalle intersezioni delle kl, $k'l'$ con le cd, $c'd'$ rispettivamente, cioè i punti q, q'.

CAPITOLO VI.

DELLE SUPERFICIE CURVE, E DE' DETERMINANTI DEL LORO SITO NELLO SPAZIO.

113. Del pari che le linee curve sono classificabili, per le ricerche geometriche su di esse, o dalla loro genesi, o dall' equazione corrispondente; lo stesso è pure per le superficie curve. Ma per gli usi delle arti del disegno le une, e le altre possono essere sì arbitrariamente segnate in un piano, o aver luogo nello spazio, che ad alcuna classe non sieno rapportabili, cioè, per servirmi della stessa espressione da me adottata per le linee curve, ch' esse non sieno in alcun modo *definibili*. Or per queste non può adottarsi alcuna particolare considerazione geometrica, riducendosi il loro sito a quello speciale di ogni punto che le appartiene. Ciò posto:

114. Def. x. Diremo *definibile* una superficie curva, se di essa può assegnarsene la genesi, o la natura, per una proprietà caratteristica costante, o per una equazione a tre indeterminate, che convenevolmente la rappresenti.

Così è definibile la superficie della sfera dalla proprietà che ha ogni suo punto di essere equidistante da un punto unico di sito fissato in mezzo ad essa, o pure dall' equazione caratteristica $r^2 = x^2 + y^2 - z^2$, o da altra che in ultima analisi a questa si riduca.

E tale superficie sarebbe per l' appunto il *luogo geometrico* di quella proprietà caratteristica, o della corrispondente equazione.

115. Def. xi. Una linea curva la diremo data in un piano, se la troveremo in questo descritta, quan-

tunque non se ne conosca la natura, e che non sia nè geometricamente, nè meccanicamente descrittibile.

116. Cor. Adunque una tale curva potrà anche aver le sue parti, continue, o discontinue che sieno, della stessa, o pur di diversa natura.

117. Scol. Dalla precedente definizione si rileva, che ad una tale curva non si possa sempre condurre la tangente per mezzo di un artifizio geometrico; che perciò converrà, nella maggior parte de' casi, assegnarla ad occhio, seguendo la direzione di un elemento di essa, come suol praticarsi nelle arti del disegno.

118. Def. xii. Se una linea costante, o variabile di forma, con data legge ne scorra rasente un' altra, in piano perpendicolare al suo, genererà una superficie curva, di cui questa se ne dirà la *direttrice*, e quella la *generatrice*.

119. Scol. Nulla detrae alla generalità della presente definizione l'essersi supposta la *direttrice* una curva *piana*, cioè segnata nel piano; poichè è chiaro, che comunque essa si fosse supposta una curva a *doppia curvatura* nello spazio, si avrebbe sempre potuto concepir segata la superficie di cui era direttrice da un piano di sito, e prender la curva d'intersezione, che risulterebbe in tal piano, come la direttrice piana della medesima superficie curva, abbandonando quella a doppia curvatura da prima stabilita.

120. Def. xiii. Se la generatrice diventi una retta, che passi sempre per un punto dato, la superficie curva generata si dirà *superficie conica*.

Quel punto fisso ne sarà il *vertice*; e la generatrice di essa, in qualunque luogo si ritrovi nel descriverla, si dirà *lato*.

O pure, la superficie conica è quella che vien rappresen-

tata dalle infinite rette, che da quel punto di sito si conducano agl' infiniti punti di quella linea curva ch' è nel piano.

121. Scol. I. Una tale superficie è necessariamente indefinita dalle due parti del punto di sito, come indefinita da queste parti stesse è la retta che la descrive; e potrà ancor essere indefinita per uno, o due altri versi, secondochè indefinita per uno, o due versi sia la linea curva, che dirige la retta rotante. Finalmente una tale superficie potrà esser composta di parti anche discontinue, e che non abbiano comune, che il solo vertice, se mai discontinua, cioè a rami separati, sia la curva direttrice.

122. Def. XIV. Che se essendo la generatrice una retta, si conservi nel suo movimento sempre parallela a se stessa, o ad una retta di sito; la superficie generata si dirà *cilindrica*.

E tale retta, in qualunque luogo si ritrovi nel descriverla, si dirà *lato*.

O pure la superficie cilindrica è quella, che viene rappresentata dalle infinite rette, che dagl' infiniti punti di quella curva si tirano parallele alla retta data di sito.

123. Scol. A questa definizione si potrà adattare, convenevolmente modificandolo, lo stesso che si è detto nello scolio alla definizione precedente.

124. Def. XV. Se il piano della generatrice costante si rivolga circolarmente intorno ad una retta di sito segnata in esso come asse, sicchè ciascun punto di quella descriva un cerchio intorno a questa, il cui raggio sia la perpendicolare tirata dal punto all' asse; la superficie curva generata si dirà *di rivoluzione costante*, o semplicemente *di rivoluzione*.

125. Def. XVI. E se la curva generatrice in tal

rivolgimento vada sempre cambiandosi con data legge per modo, ch' essa rada continuamente una data linea curva direttrice; la superficie curva descritta si dirà *di rivoluzione variabile*.

Di questo genere sono le superficie di *second' ordine* delle quali tratteremo specialmente nella part. II. del presente trattato; il che mentre illustrerà la definizione di sopra data, darà una compiuta teoria geometrica di tali superficie, della quale mancasi, e preparerà benanche la base a talune ricerche di Geometria di sito.

LEMMA I.

126. *Se in ciascun' ordinata BC della curva ACD [fig. 30.] riferita all' asse AX, prendasi un punto c in modo, che la BC stia alla Bc in una costante ragione; per tutt' i punti così determinati, e pel punto A passerà una curva Acd della stessa natura, e specie della proposta.*

Rappresentisi l' equazione alla curva ACD per

$$A + By + Cy^2 + Dy^3 \ldots = o$$

ove A, B, C, D . . . sieno funzioni della sola x; quella per l' altra Ac d si otterrà ponendo in essa la ny per y, e però avrà la seguente forma

$$A + nBy + n^2Cy^2 + n^3Dy^3 \ldots = o$$

che non differendo dalla proposta nè nel grado, nè nella forma, apparterrà ad una curva della medesima natura, e specie.

127. Con. Quindi, *viceversa*, se le curve ACD, Acd riferite allo stesso asse AX, sieno della stessa natura, e specie; le ordinate BC, Bc corrispondenti ad una medesima ascissa AB, dovranno esser tra loro in una ragione costante.

LEMMA II.

128. *Se una superficie di rivoluzione costante, o variabile seghisi con un piano parallelo alla sua direttrice; la sezione sarà una curva simile a questa.*

Cas. 1. Se la superficie sia di rivoluzione costante, è chiaro, che la sezione suddetta sia un cerchio, del pari che la direttrice.

Cas. 2. Che se la superficie suppongasi di rivoluzione variabile, ne sia DEC [*fig.31.*] la direttrice, e DAC la generatrice riferita all' asse AB, la quale dal sito A*c*C sia passata nell' altro A*e*E: inoltre rappresenti *dec* il piano segante, che incontri l' asse della superficie in *b*, e la generatrice ne' due soprindicati luoghi in *c*, *c*: congiunte le corrispondenti ordinate BC, BE, *bc*, *be* in queste due curve della medesima natura, e specie, dovranno esse risultar proporzionali (*cor.lem.pr.*); e dovrà essere BC : BE :: *bc* : *be*. Ma gli angoli CBE, *cbe*, dinotando l' inclinazione de' piani BAC, BAE, sono uguali; quindi, congiunte le EC, *ec*, i triangoli EBC, *ebc* risulteranno simili: e così successivamente; che però verranno ad iscriversi nelle due sezioni DEC, *dec* due poligoni simili, i quali confondendosi con esse, quando gli angoli CBE, *cbe*, o le sottese CE, *ce* suppongansi evanescenti; risulteranno però ancor simili le sezioni DEC, *dec*.

129. Cor. 1. Dalla dimostrazione del precedente cas. 2. rilevasi, che: *Se in due curve DEC, dec riferite agli assi DC, dc, ed a' punti B, b in questi, cadano continuamente a' perimetri di esse le BE, be in angoli uguali con le BC, bc, ed a queste proporzionali; le curve debbano esser simili.*

PROPOSIZIONE XLVI.

TEOREMA.

130. E dato il sito di una superficie curva di rivoluzione, quando sien date le sue direttrice, e generatrice, e di sito l' asse di ciascuna di queste.

La comune sezione LM [*fig.32.*] de' piani ortogonali di projezione rappresenti l' asse della direttrice DEC descritta nel piano orizzontale, e la perpendicolare BA alla LM sia l' asse della generatrice BAC in sul piano verticale; e pel punto B incontro de' due assi si tiri ad un qualunque punto E della direttrice la retta BE, sarà questa la projezione orizzontale della generatrice passante per E; e tirata dal punto E alla LM la perpendicolare EE′ rappresenterà E′ la projezione verticale del punto E di tal generatrice. Ciò posto si tiri nella DAC una qualunque ordinata $d'b'c'$; il piano condotto per essa parallelo all'orizzontale segnerà nella superficie proposta una curva, che intersegherà la generatrice passante per E in un punto F, che congiunto con b', la congiungente Fb' comprenderà con la $b'c'$ un angolo uguale a CBE; ed abbassata da F la perpendicolare Ff' sul piano verticale, che cadrà nella $d'e'$; sarà f' la projezione verticale corrispondente del punto F; e questo potrà geometricamente costruirsi nel seguente modo. Essendo CB a BE come $c'b'$: b'F, e BE a BE′, come b'F : $b'f'$, sarà BC a BE′, come $b'c'$ a $b'f'$; e però se in ordine alle rette date CB, BE, $c'b'$ si trovi la quarta proporzionale $b'f'$, sarà f' la projezione del punto F della generatrice passante per E (*): e per tal modo

(*) Per assegnare una tal quarta proporzionale, e quindi il punto F, basta congiugnere la Cc', e prodottala fino alla BA in a'; la congiungente E′a' segnerà nella $b'c'$ il punto f': e così per ogni altro analogo. Il che risulta evidente dalla natura de' triangoli simili Ba'C, $b'a'c'$, e Ba'E′, $b'a'f'$.

verrà ad assegnarsi per punti la projezione verticale di questa ; e però di essa ne sarà determinato il sito. Adunque essendo data di sito la generatrice della proposta superficie per qualunque punto della direttrice ; la superficie curva descritta avrà una posizione affatto determinata , e però sarà data di sito (*def.3.*).

131.Cor.Risulta dal teorema dimostrato,e dalle def.13,14, e 15,che i determinanti del sito di una superficie conica sieno il sito, e la forma della sua direttrice, in un piano di sito, e 'l sito del vertice di essa ; che nella superficie cilindrica oltre quella debba conoscersi il sito della retta cui la generatrice serbasi costantemente parallela . Finalmente , che per quelle di rivoluzione costante basti avere la direttrice descritta in un piano di sito , e la posizione dell' asse di questa, e però della superficie che ne risulta descritta.

132.Scol.Nel caso che la generatrice fosse una curva definibile, e di nota descrizione, è chiaro, che assegnata di essa la projezione verticale E′ del punto E [*fig.32.*] , e quindi l'ordinata BE′ corrispondente all' ascissa AB , per la projezione verticale della generatrice passante per E, una tal projezione di questa si potrebbe immediatamente descrivere , senza determinarla per punti.

Che se fosse una superficie conica , tal projezione sarebbe la congiungente del punto E′ con la projezione verticale A del vertice del cono ; e se cilindrica , essa sarebbe la parallela tirata per E′ alla projezione verticale della retta cui è parallela la generatrice di questa superficie.

PROPOSIZIONE XLVII.

TEOREMA.

133. Se è data di sito una superficie curva; sarà dato il sito di ogni punto di essa, sol che ne sia data una sola projezione.

La verità di questa proposizione è evidente; poichè quel punto non può essere se non uno di quelli, ne'quali tal superficie curva di sito è incontrata dalla perpendicolare elevata sul piano di projezione, da quella data del punto. Ma a convenientemente stabilirla, da corrispondere alla def. 3., bisogna mostrare il geometrico artifizio per assegnare l'altra, o le altre projezioni corrispondenti a quel punto.

Cas. 1. La projezione data p [*fig.33.*] sia primieramente nel piano della direttrice DEC, che prendasi per l'orizzontale, riferendola all'asse DC, pel quale suppongasi passare il verticale, in cui sia segnata la generatrice ne'siti D,C, ed intorno all'asse AB. Dal punto B, incontro de'due assi, al punto p si tiri la Bp, che incontri il perimetro della direttrice DEC in E; sarà data la forma, ed il sito della generatrice nel punto E (*prop.pr.*). Ed asseguata la projezione verticale E$'p'$A di questa, il punto p', ove l'incontra la perpendicolare indefinita pP$'p'$ alla LM, sarà la projezione verticale cercata di quello P della superficie proposta, projettato orizzontalmente in p.

Cas. 2. Or la projezione p' [*fig. 34.*] sia data sul piano della generatrice DAC, e però sia la verticale, e si cerchino le orizzontali corrispondenti. Pel punto p' si tiri la $k'b'n'$ parallela alla DC, che rappresenta la comune sezione de' piani ortogonali, in cui sono segnate le direttrice, e generatrice ne' punti D, C, e poi la superficie proposta s'intenda segata da un piano condotto per la $k'b'n'$, parallello a quello della direttrice DEC, che vi produrrà una sezione simile alla

direttrice DEC (*lem.2.*), ed identica alla sua projezione sul piano di questa, nel quale si potrà essa con facilità descrivere per punti nel seguente modo, cioè. Si abbassino da' punti k', n' sulla LM le perpendicolari k'K', n'N'; saranno K', N' due punti di tal projezione esistenti nel diametro DC della generatrice DEC; e condotta in questa dal punto B una qualunque inclinata BE, dovrà stare BC : BE :: BN' alla corrispondente inclinata Bp nella projezione richiesta. Adunque il punto p, come ogni altro analogo, si otterrà congiugnendo la CE, e tirandole dal punto N' la parallela N'p fino all' incontro con la BE. E nel caso, che la direttrice DEC fosse stata una curva definibile, e da potersi descrivere con un movimento continuo, lo stesso sarebbesi praticato per la projezione K'pN'. Or dovendo la projezione orizzontale del dunto P della superficie proposta projettato verticalmente in p' ritrovarsi nel perimetro della K'pN', sarà essa il punto p, in dove questa curva verrà incontrata dalla perpendicolare indefinita p'P'p tirata da p' alla LM.

134. Def. xvii. L'esibizione delle projezioni corrispondenti a' punti di una superficie curva su di un piano di projezione, data quella sull' altro di essi, conoscesi ordinariamente col nome di *costruzione della superficie curva*.

Lo stesso potrà dirsi anche del piano, la cui costruzione fu esibita nella prop.27.

135. Scol. Quantunque la *costruzione* di una superficie cilindrica, conica, o di rivoluzione costante sia chiaramente compresa nel precedente teorema di dato; purtuttavia essendo esse di uso lo più frequente, e che le costruzioni per questi casi divengono molto semplici, crediamo utile di quì esporle particolarmente, impiegandovi il seguente capitolo.

CAPITOLO VII.

COSTRUZIONE SPECIALE DELLE SUPERFICIE CONICHE, CILINDRICHE, E DI RIVOLUZIONE COSTANTE.

PROPOSIZIONE XLVIII.

PROBLEMA.

136. Costruire una superficie cilindrica data di sito.

La curva pdq [*fig.35.*] sia la traccia orizzontale di tal superficie, e le ab, $a'b'$ dinotino le projezioni di quella retta alla quale è costantemente parallela la generatrice di essa: sia inoltre c la projezione data di un punto nella superficie proposta, del quale se ne cerca l' altra projezione.

Cas. 1. Una tal projezione c esista primieramente nel piano della traccia pdq. Si tiri per c la retta ecd parallela alla ab; una tal parallela sarà la projezione di quel lato, o di que' lati della superficie cilindrica, se mai ve ne sieno più, come può avvenire, in ciascun de' quali è allogato il punto, che ha per projezione c; e ciascun di questi lati dovrà incontrare la traccia pdq, in quel punto corrispondente, dove questa è intersegata dalla ecd. Adunque un di essi l'incontri in d. Si projetti questo punto d in D', e si tiri la D'$c'e'$ parallela alla $a'b'$: quest' altra parallela sarà la projezione corrispondente di quel lato della superficie cilindrica proposta, che incontrava la traccia pdq in d, nel quale deve contenersi il punto cercato; che perciò abbassata da c sulla LM la perpendicolare cC'c', il punto c' ove questa intersega la D'e' sarà l' altra projezione del punto proposto, che ritrovavasi nel lato poc' anzi assegnato.

Cas. 2. Che se la projezione data c' non esista nel piano di projezione in cui trovasi la traccia pdq ; ma sì bene nell'altro : in tal caso si prenda ad arbitrio nella curva pdq un qualunque punto g,il quale si projetti sull'altro piano di projezione , e poi per questa projezione si tiri la $h'f'$ parallela alla $a'b'$, che incontri la LM in G', il qual punto si confonderebbe colla projezione poc' anzi detta del punto g , se i piani di projezione si supponessero ortogonali, come la figura gli rappresenta . Ciò posto si congiunga la gG', e poi per lo punto c' si conduca la $e'c'$D' parallela alla $a'b'$, e quindi alla $h'f'$, e tirata per D' la D'd parallela alla G'g, si conduca finalmente per ciascun punto d ove essa incontra la traccia pdq della superficie cilindrica la dce parallela alla ab; saranno D'e',de le projezioni di quel lato della superficie cilindrica proposta, che incontra la traccia in d, e nel quale deve trovarsi allogato il punto di cui c' n'è una projezione.Laonde l' altra di esse dovrà essere il punto c ove intersegansi la de , e la perpendicolare indefinita e'C'c abbassata dal punto e' sulla LM .

137. Scol. Pe' piani ortogonali la costruzione nel cas. 2. si eseguirebbe appuntino come pel primo , invertendo l' operazione .

PROPOSIZIONE XLIX.

PROBLEMA.

138. Costruire una superficie conica data di sito.

La soluzione di questo problema è identica a quella del precedente ; e solamente bisogna avvertire, che ciascuna projezione di un qualunque lato di quest' altra superficie si ottiene , congiugnendo la projezione corrispondente di un punto, ch' è in essa con quella del vertice, ch' è nello stesso piano di projezione .

PROPOSIZIONE L.

PROBLEMA.

139. Costruire una superficie di rivoluzione costante data di sito, con l'asse perpendicolare ad uno de' piani di projezione.

Sia *a* [*fig.36.*] la projezione dell' asse di una tal superficie su quel piano cui esso è perpendicolare, ed *a'*A' rappresenti la projezione dell' asse stesso sull' altro piano di projezione, che potrà prendersi, senza che ne resti resa particolare la presente costruzione, perpendicolare al primo. E poichè è dato il sito, e la forma della proposta superficie curva di rivoluzione, dovrà esser dato il sito, e la forma della sua curva generatrice in un piano di sito (*pr. 46.*), che suppongasi esser quello, che passando per l' asse della proposta superficie curva è parallelo al piano di projezione verticale; ed una tal curva sarà perciò identicamente rappresentata in projezione su quest' altro piano dalla *p'd'q'*. Ciò premesso:

Cas. 1. Suppongasi primieramente, che la projezione data *c* di quel punto, ch' esiste nella proposta superficie di rivoluzione, si ritrovi nel piano di projezione stesso ov'è il punto *a*, cioè nel piano orizzontale, e che si cerchi l' altra projezione di esso sul piano verticale. Si unisca la *ac*, e col centro *a* intervallo *ac* si descriva il cerchio *c d e*, che interseghi in *d* la retta *ad* parallela alla LM: egli è chiaro, che le verticali elevate da' punti *c, d* debbano incontrare la superficie di rivoluzione proposta in punti ugualmente alti sul piano di projezione orizzontale; che perciò sarà lo stesso il cercar l'altezza di ciascun punto d' incontro della verticale, che parte da *c* colla superficie data, che quella degli altrettanti punti ne' quali tal superficie è incontrata dalla verticale che parte da *d*. Or per adempiere a ciò si abbassi da *d* sulla LM la

perpendicolare $dD'd'$, sarà $D'd'$ la projezione verticale della poc' anzi detta perpendicolare condotta da d; che perciò la projezione corrispondente di ciascuno di que' punti d' incontro dovrà cadere nella $D'd'$: ma tal projezione dee trovarsi anche nella curva $p'd'q'$, perchè tutt' i punti della generatrice della superficie proposta esistente nel piano verticale condotto per $a\,d$ debbono esser projettati nella curva $p'd'q'$. Laonde il punto d' ove la $D'd'$ intersega la curva $p'd'q'$ sarà la projezione di quel punto ove la proposta superficie di rivoluzione è incontrata dalla verticale condotta da d; e perciò $D'd'$ rappresenterà l' altezza orizzontale del medesimo. Ma la stess' altezza orizzontale ha pure, come si è detto, l' altro punto della superficie projettato in c su questo piano di projezione. Adunque la projezione verticale di esso verrà dinotata dall' intersezione c' della perpendicolare indefinita $cC'c'$ abbassata da c sulla LM, e della parallela $d'f'$ alla LM condottale per d'.

Cas. 2. Che se al contrario fosse data la projezione verticale c', e si cercasse l' altra sul piano orizzontale cui è perpendicolare l' asse della superficie proposta: si otterebbe l' intento, tirando per c' l' ordinata $d'c'f'$ alla curva $p'd'q'$, che rappresenta la projezione verticale della generatrice di tal superficie, allorchè nel generarla si trova in sito parallelo al piano verticale; indi descrivendo col centro a, e col raggio uguale a $d'f'$, il cerchio cde, ed abbassando da c' sulla LM la perpendicolare indefinita $c'C'cc$; l'altra projezione cercata sarebbe uno di que' due punti c, c ove tal perpendicolare intersega la circonferenza di quel cerchio.

140. Cor. Dalla costruzione del precedente problema si rileva anche in qual modo data una sola projezione di un punto esistente in una data superficie di rivoluzione intorno ad un asse verticale, si possa determinare il cerchio, che si descriverebbe da un tal punto, nel rivolgersi che farebbe la curva generatrice intorno all' asse.

CAPITOLO VIII.

DE' PIANI TANGENTI LE SUPERFICIE CURVE, E DELLE NORMALI AD ESSE; E SPECIALMENTE DI QUELLI TANGENTI LE SUPERFICIE CILINDRICHE, E CONICHE

141. Def. XVIII. Un piano si dirà *tangente* una superficie curva, se nel luogo dell'incontro non la sega.

142. Cor. Adunque potrà esso segarla altrove.

143. Scol. Se pel luogo del contatto si facciano passare quanti si vogliano piani seganti la superficie curva; questi produrranno in essa delle sezioni, che avranno per rispettive tangenti le rette risultanti per sezioni corrispondenti nel piano tangente. Poichè altramente, se tali rette non risultassero tangenti a quelle sezioni, anche il piano tangente segherebbe queste, e però ancora la superficie curva in cui esistono.

144. Cor. 1. Adunque tutte le tangenti alle sezioni prodotte da piani seganti in una superficie curva, in un punto di essa, debbono giacere in uno stesso piano, ch'è quello il quale tocca la superficie in quel punto.

145. Cor. 2. E però assegnando il sito delle tangenti due qualunque sezioni prodotte in una superficie curva per un punto di essa, si verrà a determinare il piano tangente la medesima per tal punto. Adunque:

PRINCIPIO FONDAMENTALE.

146. Si otterrà il piano tangente una superficie curva qualunque, per un punto di essa, assegnando le tangenti in tal punto la direttrice, e generatrice della medesima.

Ed un tal problema potrà costruirsi geometricamente, o descrittivamente, secondo che geometrica, o in modo puramente descrittivo possa eseguirsi la soluzione del problema di assegnar le tangenti a quelle curve.

147. Cor. Nelle superficie coniche, e cilindriche, la tangente la generatrice in qualsivoglia punto della superficie è la generatrice stessa; e però il piano tangente in un punto di esse dovrà incontrarle lungo tutto il lato, che passa per tal punto, e toccarle sempre, mentre le tangenti le sezioni parallele alla direttrice, che sono curve simili (*lem. 2.*), ne' punti ove incontrano un tal lato, risultano parallele tra loro.

E da ciò vedesi aver queste superficie una sola curvatura, ed esser però sviluppabili, come sarà mostrato in appresso.

148. Def. xix. Due, o più superficie curve si diranno tangenti vicendevolmente, se nel luogo del contatto esse abbiano lo stesso piano tangente.

149. Cor. Ed è chiaro, che due superficie curve le quali si tocchino possano in altro lor luogo intersegarsi.

150. Def. xx. La *normale* ad una superficie curva è la perpendicolare al piano tangente nel luogo del contatto.

151. Scol. Siccome la tangente di una linea curva si ha come il prolungamento dell' archetto di essa, così il piano tangente una superficie curva si può avere come il prolungamento dell' elemento della superficie nel luogo del contatto. Quindi la normale a quel piano tangente sarà anche normale all' elemento della superficie curva. Da che risulta essere il problema della normale ad una superficie curva, in un dato punto di essa, un corollario di quello del piano tangente per tal punto, e dello scolio al n. 88.

PROPOSIZIONE LI.

PROBLEMA.

152. Tirare un piano tangente una superficie cilindrica data di sito, per un punto dato in essa.

Sieno *ab*, *a'b'* [*fig.35.*] le projezioni di quella retta cui è costantemente parallela la generatrice della proposta superficie cilindrica, e questa abbia per traccia sul piano della projezione *ab* la curva *pdq*; e sia *c* la projezione su questo piano stesso del punto dato nella superficie proposta.

Si tiri per *c* la retta *cd* parallela alla *a b*; dinoterà questa *cd*, com'è chiaro, la projezione orizzontale di quel lato della superficie cilindrica in cui si trova il punto dato, e l'incontro *d* di essa parallela colla curva *pdq* dinoterà il punto delle direttrice, cioè della traccia *pdq*, donde parte un tal lato. Or il piano tangente una tal superficie nel punto dato, dovendo toccarla in tutta l'estensione di un tal lato (*n.147.*), dovrà necessariamente incontrare il piano della traccia *pdq* nella retta *d*K', che tocca in *d* questa curva. Adunque sarà tal retta la traccia del piano tangente cercato sul piano di projezione della traccia *pdq*. E costruendosi l'altra projezione del punto dato (*pr. 47.*), si potrà facilmente esibire l'altra traccia di un tal piano (*pr.23.*), il quale resterà perciò determinato (*pr.22.*).

153. Scol. Se la retta *cd* avesse incontrata la traccia *pdq* della superficie cilindrica in più punti, altrettanti sarebbero i lati di questa ne' quali poteva trovarsi quel punto dato per la sola projezione *c*; che perciò altrettanti piani tangenti si sarebbero potuti condurre a tal superficie in questo caso, ognun de'quali avrebbe avuto per sua traccia nel piano della projezione *c* la tangente corrispondente alla curva *pdq*.

PROPOSIZIONE LII.

PROBLEMA.

154. Tirare un piano tangente ad una superficie cilindrica data di sito, per un punto dato fuori di essa.

Rappresenti pdq [*fig.37.*] la traccia della data superficie cilindrica, e sieno ab, $a'b'$ le projezioni di quella retta cui è costantemente parallela la generatrice di essa, e c, c', le projezioni del punto dato, per le quali si tirino le cf, $c'F'$, parallele alle ab, $a'b'$ rispettivamente; saranno queste cf, $c'F'$ le projezioni di quella retta, che dal punto dato si conduce parallela alla generatrice della superficie cilindrica proposta (*prop.37.*). Or una tale retta, com' è chiaro, deve esistere nel piano cercato; che perciò la traccia di questo sul piano della pdq dovrà passare per lo punto f, in dove questo piano di projezione è incontrato da quella parallela. Ma una tale traccia deve anche esser tangente alla traccia pdq della superficie cilindrica. Adunque essa sarà la fdK', che per lo punto f si tira tangente alla curva pdq. E la traccia di un tal piano tangente sull' altro di projezione si esibirà per mezzo della prop. 23.

Volendosi inoltre determinare le projezioni della linea di contatto di questo piano tangente colla superficie cilindrica, è chiaro, che una delle projezioni di questa si otterrà tirando per d la de parallela alla ab, e l' altra coll' esibire la projezione D' del punto d sull'altro piano di projezione, e tirando poi per questa la $D'e'$ parallela alla $a'b'$.

155. Scol. Se più tangenti si potessero condurre dal punto f alla curva pdq, altrettanti sarebbero i piani tangenti ad essa, che gli si potrebbero condurre pel punto dato; e ciascun di questi avrebbe per sua traccia sul piano della pdq

una di tali tangenti, e la traccia corrispondente si determinerebbe per mezzo della citata prop. 23. Che se poi niuna tangente si possa condurre dal punto *f* alla curva *pdq*, come avverrebbe per un esempio in taluni casi della curva *pdq*, che fosse un' iperbole conica; allora niun piano tangente si potrà condurre alla superficie cilindrica proposta dal dato punto fuori di essa.

E da ciò resta pienamente determinato il precedente problema.

PROPOSIZIONE LIII.

PROBLEMA.

156. Tirare un piano tangente una superficie cilindrica data di sito, il qual sia parallelo ad una linea retta di sito.

Sieno *ch*, *c'h'* [*fig.38.*] le projezioni della retta di sito cui dee esser parallelo il piano tangente una superficie cilindrica, che abbia per sua traccia nell' un de' piani di projezione la curva *pdq*, e per retta cui serbasi costantemente parallela la sua generatrice quella delle projezioni *ab*, *a'b'*.

Si faccia passare per la retta data di sito il piano parallelo alla retta, che ha per projezioni le *ab*, *a'b'* (*pr.39.*), e sia *fl* la traccia di questo piano su quello di projezione della curva *pdq*. È chiaro che il piano tangente cercato dovrà esser parallelo al precedente, e quindi incontrare il piano della curva *pdq* in una retta tangente a questa, e parallela alla *fl*. Laonde si avrà la traccia di tal piano tangente, su quello di projezione ov' è la curva *pdq*, tirando a questa la tangente *kd*K' parallela alla *fl*: e tirando per K' la retta K'*k'* parallela all' altra traccia N'*g'* del piano che si è condotto parallelo alla generatrice della superficie cilindrica proposta,

una tal parallela K'*k'*, sarebbe l' altra traccia del piano tangente cercato (*pr. 38*).

157. Scol. 1. L' operazione grafica di tirare la tangente parallela ad una retta di sito data nel piano di essa, si esegue per mezzo del noto strumento detto *parallelismo*, adattando una delle righe di esso lungo la retta di sito, o altra qualunque, che le sia parallela, ed allontanandone l' altra riga, finchè vada a toccare la curva proposta; il che non potendo avvenire il problema sarebbe impossibile. E nel caso che la curva fosse definibile, dalla natura della medesima potrà ricavarsi la geometrica costruzione del problema.

158. Scol. 2. E per tal modo si potrà condurre la tangente ad una curva, che s' inclini ad una qualunque retta di sito nel piano di essa, in un dato angolo.

Imperocchè costituiscasi ad un punto F [*fig. 39*] della retta di sito DE l'angolo GFD uguale al dato R; la tangente BH la curva data BAC parallela alla GF soddisferà al quesito. Ed è chiaro che queste possano essere ancor due, come due sono le rette GF, che con la FD comprendono angoli uguali ad R; e talvolta che risulti insuscettivo di soluzione il problema, come avverrebbe nell' iperbole, se la retta di sito ne fosse l' asse primario, e l' angolo dato quello, che da questo può comprendersi con un diametro qualunque.

PROPOSIZIONE LIV.

PROBLEMA.

159. Tirare ad una superficie cilindrica un piano tangente, che s' inclini all' orizzontale in dato angolo.

Per la retta cui è costantemente parallela la generatrice della superficie cilindrica proposta, che potrà anche essere

un lato qualunque di questa, le cui projezioni sieno rispettivamente dB′,D′b′ [*fig.40.*] si faccia passare il piano dA′b′, che s' inclini all' orizzontale nell' angolo dato R (*pr. 11.*); indi si conduca alla direttrice pdq della superficie cilindrica, ch' è nel piano orizzontale, la tangente hk parallela alla traccia orizzontale A′d di quel piano (*sc.1.pr.53.*); è chiaro esser questa la traccia corrispondente del piano tangente cercato. E la traccia verticale si esibirà producendo la hk fino ad incontrare in H′ la LM, e tirando per H′ la H′h′ parallela alla A′b′ traccia corrispondente del piano b′A d.

160. Scol. Si vede, che il problema avrà tante soluzioni, per quante tangenti parallele alla A′b potranno condursi alla curva pdq; e nel caso, che alcuna non ve ne corrisponda, il problema sarà impossibile.

PROPOSIZIONE LV.

PROBLEMA.

161. Tirare un piano tangente una superficie conica data di sito, per un punto dato in essa.

La soluzione di questo problema è identica a quella del già risoluto nella prop.51.; e solamente conviene avvertire, che le projezioni de' lati di questa superficie, com'è già noto, debbono passare tutte per le corrispondenti projezioni del vertice del cono dato.

PROPOSIZIONE LVI.

PROBLEMA.

162. Tirare un piano tangente una superficie conica data di sito, per un punto dato fuori di essa.

Anche la soluzione di questo problema si può condurre nel modo stesso, che quella della prop. 52.

PROPOSIZIONE LVII.

PROBLEMA.

163. Tirare un piano tangente una superficie conica data di sito, il quale sia parallelo ad una retta anche data di sito.

Per lo vertice del cono si tiri una retta parallela alla data (*pr. 37.*); e poi per lo punto ove questa parallela incontra il piano di projezione della traccia della superficie conica (*pr. 16.*), se ciò avviene, si tiri la tangente a questa traccia: una tal tangente sarà la traccia corrispondente del piano tangente cercato. E l'altra traccia si otterrà producendo la già avuta fino ad incontrar la comune sezione de' piani di projezione, e congiugnendo un tale incontro con la projezione corrispondente del vertice del cono.

Che se poi quella parallela non incontri il suddetto piano di projezione, si avrà la traccia su questo del piano tangente cercato, tirando alla traccia della superficie conica una tangente parallela alla projezione corrispondente della retta condotta dal vertice suo parallela alla data, o anche a dirittura a quella di questa.

E l'una, e l'altra cosa comprendonsi abbastanza da loro stesse.

PROPOSIZIONE LVIII.

PROBLEMA.

164. Tirare un piano tangente una superficie conica data di sito, il quale s' inclini al piano orizzontale in un dato angolo.

Al punto a' [*fig. 41.*], projezione verticale del vertice della superficie conica proposta, costituiscasi con la retta $a'A'$, uguale all'altezza orizzontale di tal vertice, l' angolo $A'a'B'$ quanto il complemento del dato R; indi col centro a, projezione orizzontale del vertice suddetto, e col raggio $A'B'$ si descriva il cerchio ab; è chiaro esser questo la base di un altro cono del vertice stesso del proposto, tal che ogni piano tangente la sua superficie inclinasi all' orizzontale nell' angolo dato R; e però dovendo tra questi esistere ancor quello che cercasi, è chiaro, che la traccia orizzontale di esso otterrassi, tirando la tangente comune db alla traccia orizzontale pdq della superficie conica proposta, ed al cerchio ab base del cono retto descritto: e passando un tal piano pel vertice del cono, ne sarà anche data la traccia verticale corrispondente (*pr.23.*): che però rimarrà pienamente determinato.

Ed è manifesto, che tanti piani tangenti con la condizione proposta potranno aver luogo, quante saranno le tangenti comuni bd a quelle due curve; e che il problema risulterà possibile ne' casi, che il sia questo di riduzione per esso.

CAPITOLO IX.

DE' PIANI TANGENTI LE SUPERFICIE CURVE DI RIVOLUZIONE COSTANTE, E SPECIALMENTE LE SFERICHE.

PROPOSIZIONE LIX.

PROBLEMA.

165. Tirare un piano tangente una superficie di rivoluzione, il cui asse si supponga perpendicolare ad uno de' piani di projezione, per un punto dato in essa.

Sia a [*fig. 36.*] la projezione dell' asse delle superficie data sul piano di projezione cui esso è perpendicolare, che prendasi per l' orizzontale, $A'a'$ la corrispondente projezione verticale, $p'd'q'$ la projezione della generatrice di tal superficie nella posizione in cui è parallela al piano della $A'a'$, la quale sarà perciò una curva identica a tal generatrice. Finalmente sia c la projezione orizzontale del punto del contatto, e c' dinoti la corrispondente projezione verticale di esso, la quale siesi determinata costruendo la superficie proposta (*pr. 50*).

Or il piano tangente cercato dovendo esser quello, che passa per le tangenti condotte in questo punto dato al cerchio orizzontale, che passa per esso (146.), ed alla generatrice verticale della proposta superficie curva, dovrà la sua traccia orizzontale incontrare la ac, traccia corrispondente dal piano verticale in cui esiste la poc'anzi detta generatrice, in quel punto ove essa ac è incontrata dalla tangen-

te della generatrice stessa nel punto del contatto dato : e di più siccome il raggio di quel cerchio , che va al punto del contatto è parallelo alla ac , e la tangente un tal cerchio nel punto stesso è orizzontale, e quindi parallela alla traccia orizzontale del piano tangente cercato ; perciò l' angolo , che quelle due rette comprendono nel punto del contatto, dovrà esser uguale a quello della ac colla traccia orizzontale di un tal piano tangente (*10.El.XI.*). Laonde questo sarà retto al pari di quello . Non resta dunque a far altro, per esibire una tal traccia,che a determinare il punto ov'essa incontra la ac. Per ottenerlo basta riflettere, che la generatrice della superficie proposta esistente nel piano verticale che passa per ac, ed il punto dato in essa hanno rispetto all' asse , ed alla ac identico sito a quello , che ha la curva $p'd'q'$, che dineta tal generatrice nel piano verticale di projezione, e'l punto d', rispetto alla $A'a'$, ed alla $A'M$: che perciò, se per lo punto d' si tiri la tangente $d'H'$ alla curva $p'd'q'$, la retta $A'H'$ dinoterà la distanza dal punto a , alla quale la tangente della generatrice della proposta superficie curva, che passa per lo punto dato in questa, incontra la ac. Laonde tagliando sulla ac la ah uguale alla $A'H'$, ed elevando da h alla ah la perpendicolare hK' , sarà questa la traccia orizzontale del piano tangente richiesto . E la verticale si otterrà col mezzo della prop. 23.

166. Se la superficie di rivoluzione fosse quella di una sfera , il presente problema si ridurrebbe a tirare pel punto dato in essa un piano perpendicolare al raggio, che va al contatto ; E la costruzione di esso a quella della prop. 32.

PROPOSIZIONE LX.

TEOREMA.

167. Condurre per una retta di sito un piano, che tocchi una superficie sferica data.

Prendasi per l'un de'piani di projezione quello cui è perpendicolare nel punto f la retta data [*fig.42.*] , la quale avrà, per conseguenza, per sua projezione sull'altro piano di projezione la perpendicolare indefinita $F'f'$, abbassata dal punto f sulla LM. Sieno inoltre a, a' le projezioni del centro della sfera , ed il cerchio pde la projezione della stessa sul piano cui si è supposta perpendicolare la retta data : un tal cerchio dinoterà anche la traccia, su questo stesso piano, di una superficie cilindrica circoscritta alla sfera data , la cui generatrice sia una retta parallela alla data ; ed il piano tangente dimandato sarà, com'è chiaro, quello stesso, che per un punto qualunque della retta data si condurrebbe a questa superficie cilindrica, cioè avrà per sua traccia sul piano del cerchio pde la tangente $f'd$, che dal punto f si conduce a questo cerchio; e l'altra traccia sarà la perpendicolare $K'k'$ elevata alla LM nel piano verticale , dal punto K', ov' essa è incontrata dalla $f'd$.

168. Scol. La soluzione del presente problema si vedrà tra poco compresa , come un caso particolare, in quella della prop. 65.

LEMMA I. PROBLEMATICO.

169. *Dati in un piano due cerchi di grandezza, e di sito, condurre ad essi la tangente comune.*

ANALISI GEOMETRICA.

Sia DQ [*fig.43.*] una tangente comune a'due cerchi PDE, QGH, dati come poc'anzi si è detto; tirati i raggi AD, BQ a'punti de'contatti, risulteranno simili i triangoli ADK, BQK; e quindi starà AD : BQ :: AK : KB. Laonde sarà dato nella congiungente AB de' centri de' cerchi dati il punto K, pel quale deve passare la tangente comune ad essi.

COMPOSIZIONE GEOMETRICA.

Si prenda nella AB il punto K in modo, che stia AK : KB :: AD : BQ; e per K si tiri la tangente all'un cerchio; questa dovrà toccare anche l'altro.

La dimostrazione è chiara dalla costruzione.

170. Scol. È facile rilevare dalla soluzione del precedente problema, che nella congiungente AB i centri de' cerchi dati esistano due punti K diversi, da ciascun de'quali si può condurre ad essi cerchi la tangente comune: ed un di questi punti è tra i centri A, B, l'altro nella AB prolungata dalla parte del cerchio minore. E comechè per ognuno di tali punti posson condursi ad un cerchio due tangenti; risulteranno perciò quattro le tangenti comuni a' due cerchi.

PROPOSIZIONE LXI.

PROBLEMA.

171. Condurre un piano tangente a due superficie sferiche date di grandezza, e di sito, e che passi per un punto dato.

Dinotino i punti a, a' [*fig.44.*] le projezioni del centro di una di tali sfere, b, b' quelle del centro dell'altra, e c, c' le projezioni del punto dato. S' intendano esse sfere segate da un piano parallelo a quello delle projezioni a, b, c, e sieno i cerchi pde, qgh (*Trig.pr.1.III.*) le projezioni rispettive delle sezioni prodotte da quel piano segante nelle sfere, cioè le projezioni delle sfere stesse. Ciò posto, si conduca a'cerchi pde, qgh la tangente comune dqk (*lem.pr.*) sarà questa, com'è chiaro, la projezione della tangente comune corrispondente in que'cerchi, che sono prodotti nelle sfere dal piano segante suddetto; ed il punto k sarà la projezione sul piano abc di quel punto, ove la poc'anzi detta tangente incontra la congiungente i centri delle sfere date, ed il quale può prendersi come il vertice di quel cono, che viene a generarsi dalla suddetta tangente, se essa concepiscasi rivolgere, insieme co' semicerchi generatori delle sfere esistenti nel piano segante, intorno alla congiungente i centri di queste: e l' altra projezione di questo vertice nel piano $a'b'c'$ sarà l' incontro k' della perpendicolare indefinita $k'K'k'$ alla LM con la $a'b'$

Or il piano tangente cercato dee toccare anche una tal superficie conica, e quindi passare per quel punto, che ha per projezione le k, k', o sia esso piano deve passare per la retta di sito, che ha per projezioni le ck, $c'k'$: che perciò il proposto problema si è ridotto al precedente. cioè a tirare per tal retta di sito un piano tangente ad una delle sfere date.

172. Scol. Essendo due in diversa posizione le tangenti

comuni, che possonsi condurre a due cerchi (162.), ne segue, che anche due diverse sieno le superficie coniche circoscrittibili a due sfere, una cioè, che le inviluppa in una sola superficie conica, l'altra, che le chiude in due opposte: e siccome a ciascuna di queste possonsi tirare due piani tangenti; saranno perciò quattro i piani tangenti due sfere, ed i quali passano per un punto dato: e due di essi le toccheranno da una parte stessa, due altri per versi opposti.

LEMMA II.

173. *Se in un piano esistano tre cerchi dati di grandezza, e di sito, e ad essi, presi due per volta, si tirino le tangenti comuni; i tre punti ove queste concorrono colle rispettive congiungenti de' loro centri, debbono trovarsi allogati in una retta di sito.*

Si tiri per c [*fig.45.*], centro di uno de'tre cerchi dati, la retta cl parallela alla congiungente i centri b, a degli altri due, ed una tal parallela si prolunghi fino ad incontrare in l la retta fd, che unisce i punti di concorso f,d delle tangenti comuni a' cerchi a, b; b, c, e che è data di sito, poichè congiugne i punti f, d dati di sito (*pr.1,*): sia in fine e il concorso delle tangenti comuni a'cerchi a, c: dico, che un tal punto debba trovarsi allogato nella fd.

S' indichino con R, R′, R″ rispettivamente i raggi de'tre cerchi, che hanno per centri i punti a, b, c. E perchè deve stare $R : R' :: af : fb$ (*n.* 167.), ed $R' : R'' :: bd : dc$, cioè $:: bf : cl$; sarà, per equalità, $R : R'' :: af : cl$. Ma è poi $R : R'' :: ae : ec$: quindi il punto e dovrà trovarsi allogato nella fd.

PROPOSIZIONE LXII.

PROBLEMA.

174. Tirare un piano tangente a tre superficie sferiche date di grandezza, e di sito.

Pe' centri *a*,*b*,*c* [*fig.45.*] delle tre sfere date, si concepisca passare un piano, il quale prendasi per uno di quelli di projezione; e poi si tirino ad essi cerchi, presi due a due, le tangenti comuni, le quali concorrano con le rette, che congiungono i loro centri rispettivamente, in *f*, *e*, *d*; sarà data di sito la retta *fed*, che passa per essi (*lem. prec.*). E perchè ciascuna di quelle tangenti rivolgendosi insieme co' due cerchi che tocca intorno alla congiungente de' centri di questi, descrive una superficie conica tangente le sfere da essi cerchi descritte, si verrebbero perciò in tal rivoluzione a descrivere tre coni circoscritti alle tre sfere date, ed a ciascun de' quali verrebbe ad esser tangente il piano, che deve toccar le sfere; che perciò un tal piano dovrà passare pe' loro vertici, e quindi per la retta di sito *fed*. Laonde il proposto problema si è ridotto all' altro di condurre per la retta di sito *fed* un piano tangente ad una di quelle tre sfere.

175. Scol. Poichè, come fu detto al num. 170, a due cerchi possonsi condurre due tangenti comuni in diversa posizione; saranno perciò sei que' punti in dove le tangenti condotte a tre cerchi, presi due per volta, incontrano le rispettive congiungenti de' loro centri *f*, *e*, *d*, *h*, *k*, *g*, e questi presi a tre a tre nel seguente modo, cioè *f*,*e*,*d*; *f*,*k*,*g*; *e*,*k*,*h*; *d*, *g*,*h*, si troveranno allogati nella stessa retta di sito, cioè *fed* pe' tre primi, ed *fkg*, *ekh*, *dgh* per gli altri rispettivamente. Laonde il proposto problema resterà sempre risoluto per qualunque di queste quattro rette si conduca un piano tangente ad una delle tre sfere date. E siccome per una retta si pos-

sono condurre ad una sfera due piani tangenti; perciò saranno otto diversi i piani tangenti tre sfere date, de' quali però due, cioè quelli che passano per la retta *fed*, toccano le sfere tutte tre da una stessa parte; mentre ciascuno de' rimanenti tocca sempre due sfere da una parte, e la terza dalla parte opposta, come facilmente si ravvisa.

LEMMA III. PROBLEMATICO.

176. *Assegnare su di un piano di sito la traccia di una superficie cilindrica, con la generatrice parallela ad una retta di sito, circoscritta ad un' altra di rivoluzione ancor data, con l' asse perpendicolare a quel piano.*

Lo stesso per una superficie conica col vertice dato.

PARTE I. PER LA SUPERFICIE CILINDRICA.

Il piano dato di sito prendasi per quello di projezione orizzontale, ed il verticale di projezione passi per l'asse AA′ [*fig. 46.*] della superficie di rivoluzione, ed abbia la sua traccia orizzontale, cioè la comune sezione LM de' piani ortogonali di projezione, parallela alla projezione orizzontale *de* della retta alla quale è costantemente parallela la generatrice della superficie cilindrica proposta, di cui la corrispondente projezione verticale sia la *d*′E′. Sia inoltre la curva BAC la generatrice della superficie di rivoluzione, nel piano verticale, intorno all' asse AA′, e ad essa tirisi la tangente FG′ parallela alla *d*′E′, che incontri la LM in G′; rappresenterà questa quel lato della superficie cilindrica proposta, che la tocca in F, nella generatrice AFC, e G′ ne sarà un punto della traccia orizzontale.

Or prendasi nella curva AFC, prossimamente ad F, un altro punto P, pel quale le si tiri la tangente PQ, e dal punto Q ove questa incontra l' asse indefinito A′A si tiri la QK parallela alla FG′, che incontri l' ordinata HP pel punto P in K; il qual punto, come apparisce dalla costruzione, che segue,

dovrà cadere al di fuori della curva AFC, e per tal modo si vedrà se doveva esso venir preso al di sotto, o al di sopra dell'altro F. È evidente, che nel rivolgersi la curva AFC intorno ad AA′, per generar la superficie di rivoluzione, la tangente QP vi genererà una superficie conica, tangente la data di rivoluzione nel cerchio del raggio PH; ed il piano tangente una tal superficie conica condottole per QK, sarà anche tangente quella nel punto R, ove la tangente condotta da K al cerchio del raggio PH incontra questo: ed il lato della superficie cilindrica proposta, pel punto K, dovendo esistere in tal piano (*n.* 144.), ed esser parallelo alla retta di sito, si costruirà nel seguente modo. Il punto P si projetti orizzontalmente in P′, e l'altro K in K′, e descrivasi col centro A′, e col raggio A′P′ il cerchio P′*r*, cui si tiri da K′ la tangente K′*r*; saranno quel cerchio, e questa tangente le identiche projezioni del cerchio pel punto P, e della tangente esso per K: ed il punto *r* sarà però la projezione orizzontale dell' altro R, per dove passava il suddetto lato della superficie cilindrica; e la corrispondente projezione verticale di quel punto sarà l' incontro *r′* della HP con la perpendicolare indefinita *r*R′*r′* abbassata da *r* sulla LM. Adunque l' una delle projezioni di quel lato sarà la *r′*T′ parallela tirata per *r′* alla *d′*E′, e l' altra la parallela *rt* tirata per *r* alla *de*; e l'incontro *t* di esso lato col piano orizzontale risulterà determinato.

Nel qual modo determinando gl' incontri di altri lati con tal piano; la curva condotta per essi, e pel primo punto determinato G′, sarà la traccia cercata.

PARTE II., PER LA SUPERFICIE CONICA.

Il piano di projezione verticale passi per l'asse AA′[*f.* 47.] della data superficie di rivoluzione, e pel vertice S del cono circoscrittole, di cui ne saranno due lati, che toccheranno quella nella curva AC, le tangenti SF, SF, che da S si con

durranno a questa; ed i loro incontri con la LM saranno due punti della traccia orizzontale richiesta. E tutta la costruzione procederà come nella parte precedente, se non che, invece di tirare per gl' incontri Q delle tangenti la curva BAC con l' asse indefinito AA′ le parallele alla projezione verticale della retta di sito, converrà congiungerli col punto S vertice della superficie conica. Ed ottenuti col procedimento suddetto i punti R di contatto della superficie conica generata da QGH con quella di rivoluzione, i lati corrispondenti a' punti stessi dell' altra superficie conica richiesta avranno per projezione le congiungenti le projezioni r, r' del punto R con le corrispondenti projezioni S, S′ del punto dato.

177. Cor. Dalla precedente costruzione si rileva, che la curva condotta pel punto F′, e per tutti gli altri punti r sia metà della projezione orizzontale di quella di contatto della superficie cilindrica, o conica con quella di rivoluzione, esistendone l' altra metà identica, e facilissima a descriversi, dalla parte posteriore della LM: e che l' altra curva condotta pe'punti F, r', r',... ne sia la corrispondente projezione verticale; ond' è che una tal curva di contatto rimarrà anche assegnata.

178. Scol. Se mai, per la parte I, si potranno condurre due tangenti alla curva BAC, parallele alla d'E′, e per la parte II, che cadano in essa dal punto S, si otterranno due punti di contatto per volta della superficie cilindrica, o conica con quella di rivoluzione, e però due lati di ciascuna di esse, che si vedrà involgere, e comprendere interamente la superficie data di rivoluzione; e la traccia orizzontale della superficie cilindrica, o conica risulterà quindi una curva chiusa. Che se una sola sia la tangente, un sol lato si avrà per volta, e la traccia risulterà una curva i cui rami non ritorneranno a riunirsi. Finalmente se alcuna tangente, o nel principio della costruzione, o nel proseguimento di essa non possa condursi alla curva generatrice del-

la superficie di rivoluzione con le condizioni assegnate, si rileverà da ciò, che co' dati proposti non era possibile il problema, o pure, che la superficie cilindrica, o conica debba arrestarsi in quel luogo, ove la costruzione comincia a rendersi ineseguibile.

PROPOSIZIONE LXIII.

PROBLEMA.

179. Condurre per una retta di sito un piano che tocchi una data superficie di rivoluzione.

L' asse della superficie di rivoluzione stabiliscasi perpendicolare al piano orizzontale; e determinata su questo la traccia della superficie cilindrica ad essa circoscritta, con la generatrice parallela alla retta di sito (*lem.prec.p.1.*); il problema si vedrà ridotto a tirare, pel punto d' incontro della retta di sito col piano orizzontale, la tangente alla traccia assegnata della superficie cilindrica; sarà questa tangente la traccia orizzontale del piano tangente cercato. Ed assegnato l'incontro della retta di sito col piano verticale di projezione; la congiugnente un tal punto con quello, ove la traccia orizzontale incontrava la comune sezione de' piani ortogonali, darà la traccia verticale del piano tangente richiesto.

180. La soluzione avrebbe potuto egualmente effettuarsi, circoscrivendo alla superficie data di rivoluzione una superficie conica, avente pel vertice un punto qualunque della retta data di sito (*lem.prec.p.2.*).

PROPOSIZIONE LXIV.

PROBLEMA.

181. Tirare ad una superficie di rivoluzione, con l' asse verticale, un piano tangente parallelo ad un piano dato.

Sia a [*fig. 48.*] la projezione orizzontale dell' asse della superficie data, $A'a'$ la verticale, $p'd'q'$ la projezione della generatrice di tal superficie nella posizione in cui è parallela al piano verticale di projezione, che sarà perciò una curva identica a tal generatrice. Finalmente sieno $E'f$, $E'f'$ le tracce di quel piano cui deve esser parallelo l' altro, che si vuol tirare tangente alla superficie proposta.

Si supponga passare per l' asse della superficie data un piano perpendicolare al dato $f'E'f$; un tal altro piano avrà per sue tracce la gaH' perpendicolare alla $E'f$, e la $H'h'$ perpendicolare alla LM, ed intersegherà il piano $fE'f'$, ed il piano tangente, che si cerca, in due rette parallele tra loro; vale a dire, che la tangente la generatrice della proposta superficie curva, in quel punto ov' essa è incontrata dal piano tangente, che vuol tirarsi, deve essere parallela alla comune sezione de' piani fEf', $gH'h'$; e l' asse della superficie proposta dovendo incontrare il piano dato nella comune sezione di questa con l'altro $gH'h'$; la projezione di tal punto d'incontro sul piano della $p'd'q'$ dovrà essere il punto b', ove s'intersegano la projezione $A'a'$ di quell'asse, e l' altra della comune sezione suddetta, la quale si determina facilmente, come nella prop. 28.

Or si concepisca quel piano verticale condotto per l' asse rivolgersi intorno a questo, fintantochè divenga parallelo all' altro di projezione verticale, cioè finchè la sua traccia

*ga*H′ divenga *ak*, parallela alla LM ; in tal caso tutto quello ch'è in esso segnato, cioè la curva generatrice della superficie proposta , la comune sezione di esso col piano dato, e la tangente la suddetta curva parallela a quella comune sezione, avranno un identico sito alle loro projezioni sul piano di projezione verticale : che perciò, se col centro *a*, intervallo *ag* si descriva l' arco *gk* , il punto *k* darà il luogo ove la comune sezione de' piani *f*E′*f*′ , *g*H′*k*′ incontra il piano orizzontale di projezione, allorchè il piano *g*H′*h*′ passa nel nuovo sito ; e se un tal punto *k* si projetti in K′, congiunta la K′*k*′ sarà questa la projezione verticale di quella parte di tal comune sezione , ch' è interposta tra l' incontro di essa coll' asse della superficie data, e 'l punto *k*. E da quello che si è detto, la K′*b*′ rappresenterà anche la vera posizione di tal retta,per rapporto alla curva generatrice della superficie proposta. Laonde se alla curva *p*′*d*′*q*′ si tiri la tangente F′*d*′*l*′ parallela alla K′*b*′ , questa dinoterà la tangente alla curva proposta, nel luogo ov'essa è incontrata dal piano tangente cercato , cioè sarà *d*′ il punto di contatto ; che perciò projettandosi il punto *d* sulla *ak* , e poi descrivendosi un cerchio col centro *a* intervallo *ad* ; il punto *c* ove la circonferenza di questo cerchio intersegherà la *ga*H′ , rappresenterà la projezione orizzontale di quel punto di contatto di cui la projezione verticale sarà il punto *e*′, ove incontransi la parallela alla LM tiratale per *d*′, e la perpendicolare abbassatale da *c*. Ed il problema presente si sarà ridotto all' altro risoluto nella prop. 59.

ALITER.

182. Fatta la stessa esposizione di dati del problema , che nella precedente soluzione, si determini l'angolo R [*fig. 48.*] in cui inclinasi il piano dato *f*′E′*f* all' orizzontale (*pr. 26.*) ; indi alla curva *p*′*d*′*q*′ si tiri la tangente F′*d*′*l*′,che s'in-

clini alla LM nell'angolo $d'F'M$ uguale ad R, ed essa incontri la $A'a'$ in a'. Sarà un tal punto la projezione verticale del vertice A della superficie conica circoscritta alla proposta di rivoluzione intorno all' asse Aa, di cui ciascun lato inclinisi all' orizzontale nell' angolo R, e la cui base su questo piano sarà il cerchio nrn; descritto col centro a projezione orizzontale di quel vertice, e col raggio $A'F'$; la quale è però il luogo geometrico di tutt'i piani tangenti la superficie proposta, ed inclinati all'orizzontale nell'angolo suddetto. Or tra questi dovendo esistere il cercato, la cui traccia orizzontale dee essere, per la condizione del problema, parallela alla $E'f$, sarà facile ottenerla, abbassando dal centro a del cerchio la perpendicolare ag alla $E'f$, e dal punto r ove questa incontra la circonferenza di quel cerchio elevandole la perpendicolare rT'. E la traccia verticale corrispondente sarebbe la parallela tirata per T' alla traccia verticale $E'f'$ del piano dato.

183. Cor. Da ciascuna delle due precedenti soluzioni si rileva, che il luogo de' contatti de' piani tangenti la superficie di rivoluzione proposta sia il cerchio del raggio $d'a''$ projettato verticalmente in questa retta, ed orizzontalmente nell' ugual cerchio cdc.

184. Scol. Se la superficie di rivoluzione sia sferica, si potrà prendere per piano di projezione orizzontale quello, che passando pel centro A [*fig. 49*] sia perpendicolare al piano di sito $f'E'f$; e però la superficie sferica avrà per sua traccia orizzontale il semicerchio generatore $P'RQ'$, e per traccia verticale l' altro $P'R'Q'$. E la traccia verticale del piano cercato dovrà essere perpendicolare alla LM. Laonde se tirisi, dal centro A, la perpendicolare AG alla traccia orizzontale $E'f$ del piano dato, e dal punto R, ove essa incontra il semicerchio $P'RQ'$, conducasi al cerchio la tangente RT', sarà questa la traccia orizzontale del piano cercato, e la perpendicolare $T't'$ alla LM ne sarà la traccia verticale corrispondente.

PROPOSIZIONE LXV.

PROBLEMA.

185. Tirare un piano tangente una sfera, ed una superficie cilindrica, date di sito.

Sia la curva *abc* [*fig.50.*] la traccia orizzontale, o la direttrice della superficie cilindrica, ed *ad* la projezione su tal piano della retta generatrice della medesima in un punto qualunque. Il piano verticale di projezione passi pel centro O della sfera data, segnando in essa il cerchio generatore $f\,h'f'$, e la sua traccia orizzontale LM, o sia la comune sezione con questo piano di projezione sia parallela alla *ad*, alla quale corrisponda la projezione verticale $A'd'$. Su questa, dal centro O del cerchio $f'h'f'$ si abbassi la perpendicolare $f'Of'e'$, e per gli estremi f', f' del diametro $f'f'$ si tirino a quel cerchio le tangenti $f'G'$, $f'G'$, che risulteranno parallele alla $A'd'$, e però alla generatrice della superficie cilindrica proposta: ed esse saranno ancora i lati estremi di un' altra superficie cilindrica avente per direttrice il cerchio descritto da $f'f'$ perpendicolarmente al piano verticale di projezione; e questa superficie cilindrica incontrerà il piano orizzontale nell' ellisse $G'nG'$, descritta col centro H' ove la $G'G'$ rimane divisa per metà dalla OH' parallela ad $f'G'$, con l' asse maggiore $G'G'$, e col minore $nH'n$ quanto il diametro del cerchio generatore della sfera *.

Or poichè la superficie del cilindro proposto, e quel-

* Ciò sarà più appresso dimostrato, nel capitolo XII., e può ancora rilevarsi dal lib. I. di Sereno *de sectione cylindri*.

l' altra, che si è assegnata circoscritta alla sfera hanno le loro generatrici parallele, potranno però aver piani tangenti comuni; e le tracce orizzontali di essi saranno ciascuna delle tangenti comuni alle due curve direttrici *abc*, G'*n*G', per ognuna delle quali sarà facile assegnare la corrispondente traccia verticale, prolungando quella fino alla comune sezione LM de' piani di projezione, e per questo punto d' incontro tirando la parallela alla A'*d*'.

PROPOSIZIONE LXVI.

PROBLEMA.

186. Tirare un piano tangente una sfera, ed una superficie conica, date di sito.

Il piano verticale di projezione passi pel centro O [*fig.51*] della sfera, e pel vertice A della superficie conica, di cui la projezione orizzontale sia *a*, e la direttrice di quella in tal piano sia la curva *bcd*. Pel punto A si tirino al cerchio *f'h'f'*, sezione della sfera col piano verticale, le tangenti A*f'*, A*f'*, che saranno i lati estremi, segnati nel piano verticale, della superficie conica inviluppante la sfera data, nel cerchio del diametro *f'f'*; e prolungate le A*f'*, A*f'* fino alla LM in G',G', sarà G'G' l' asse maggiore dell' ellisse prodotta in tal superficie conica dal piano orizzontale, che la sega; ed essa, determinatone l' asse minore corrispondente, si descriva nel piano orizzontale, e sia la G'*p*G'. È chiaro, che le tangenti comuni a questa ellisse, ed alla traccia *bcd* della superficie conica proposta, saranno le tracce orizzontali di ciascun de' piani tangenti cercati: e le verticali si determineranno congiugnendo col punto A gl'incontri di quelle con la LM.

187. Scol. Per determinar l' asse minore dell' ellisse G'*p*G', si prolunghi la AO fino alla G'G' in H', pel qual punto si tiri la *k*H'*k* perpendicolare alla AH', e tra le AG',

AG′,e per essa si concepisca il piano perpendicolare a quello del triangolo G′AG′ , che segnerà nella superficie conica il cerchio *kpk* , il quale incontrerebbe il perimetro dell' ellisse G′*p*G′ , sezione prodotta nella stessa superficie conica da un altro piano similmente perpendicolare a quello del triangolo suddetto (*),nella perpendicolare H′*p* ad un tal piano , che sarà però una loro ordinata comune pel punto H′, e quindi assegnata. Or dividasi G′G′ per metà in Q′, e sia Q′*q* il semiasse minore dell' ellisse G′*p*G′ ; sarà G′H′G′: H′*p*′ :: Q′G′′: Q′*q*′ ; e per conseguenza la Q′*q* rimarrà geometricamente assegnata .

SCOLIO PER LE DUE PRECEDENTI PROPOSIZIONI.

188. Le direttrici della superficie cilindrica data di sito nella pr.65, e della conica egualmente data nella 66,essendo curve qualsivogliano, anche non definibili geometricamente, le tangenti comuni a ciascuna di esse , ed all'ellisse , che ottiensi dall'analisi geometrica del problema, si tireranno in un modo grafico, o sia meccanico.Ma se quelle sieno ancor esse curve del second' ordine, come più facilmente può aver luogo,ponendosi la superficie cilindrica, o conica data esser quella del cilindro, o cono considerato negli Elementi,vi si potrà soddisfare in modo geometrico, e rigoroso prevalendosi delle soluzioni di tal problema date dal *Fergola* , rilevandola dall'analisi algebrica (**) , e dallo *Scorza* per le vie della sintesi (***) con un'analisi geometrica di greca eleganza.E si l'una , che l'altra , dopo matura ponderazione , mi hanno fatto desistere dal quì riportare, come da prima pensava, due altre analoghe soluzioni dello stesso problema, l'una, cioè, col metodo Cartesiano , l'altra con l'analisi degli antichi ; poi-

(*) §. 25. *Sez. Con.* vol. III. *Cors. geom* .
(**) *Sezioni Coniche analitiche* §§.*146 e 297.*
(***) *Divinaz. dell'Analisi geometrica degli antichi.* prob.11.p.239.

chè tutto lo studio del geometra non consiste già in accrescere soluzioni ad un problema comunque esse risultino, che non sta in ciò l' aumento della scienza; ma nello sforzarsi di ottener le più eleganti, e quelle ritenere.

PROPOSIZIONE LXVII.

PROBLEMA.

189. Tirare il piano tangente una superficie di rivoluzione data di sito, ed un' altra cilindrica similmente data.

L' asse della superficie di rivoluzione stabiliscasi perpendicolare al piano di projezione orizzontale, sul quale si trasferisca la traccia della superficie cilindrica proposta, se mai era data in altro piano, determinando gl'incontri con quello de'suoi lati, bastando sol cinque di questi, nel caso, che tal superficie fosse una curva conica(*). Indi si esibisca la superficie cilindrica, con la generatrice parallela a quella del cilindro dato, tangente la data superficie di rivoluzione, e se ne assegni la traccia orizzontale(*lem.3.p.1*). E chiaro, che il piano tangente tal superficie di rivoluzione, e'l cilindro dato debba risultar tangente questo, e la superficie cilindrica a quella circoscritta; e però, che la sua traccia orizzontale debba esser tangente le tracce orizzontali di siffatte due superficie cilindriche. Adunque condotta questa, o queste se sien più, si avranno le tracce orizzontali di altrettanti piani tangenti, per ognun de'quali si otterrà la verticale corrispondente con assegnare l'incontro con questo piano di projezione del lato di una delle due superficie cilindriche, pel punto di contatto della sua traccia con quella del piano tangente, e congiugnendo tal incontro con quello dove la traccia orizzontale incontrava la co-

(*) pr. 4. *Sez. Con.*, vol. III. *Corso geom.*

mune sezione de' piani di projezione. E non sarà possibile il problema, se alcuna tangente comune non possa condursi alle due tracce orizzontali delle superficie cilindriche, come in taluni casi può avvenire.

PROPOSIZIONE LXVIII.

PROBLEMA.

190. Tirare un piano tangente una superficie di rivoluzione data di sito, ed un' altra conica similmente data.

Si stabilisca l' asse della superficie di rivoluzione perpendicolarmente al piano orizzontale, su cui trasferiscasi la traccia della superficia conica proposta, se era data in altro piano; indi si descriva col vertice del cono un' altra superficie conica tangente la suddetta di rivoluzione, assegnandone la traccia. È chiaro, che il piano tangente richiesto debba poggiare su queste due superficie coniche, che hanno il vertice comune; e quindi, che la sua traccia orizzontale debba esser la tangente comune alle tracce orizzontali di esse superficie coniche. E la verticale corrispondente sarà facile ad esibirsi.

Lo stesso per ognuno de' piani tangenti, potendo essi esser tanti, quante le tangenti comuni corrispondenti alle tracce orizzontali delle superficie coniche data, e descritta per ausiliaria nella soluzione del problema: e questo non avrà alcuna soluzione, se le suddette tracce non ammettano tangente comune.

LEMMA IV. PROBLEMATICO.

191. *Date di sito due sfere, circoscrivere ad esse, se sieno uguali, una superficie cilindrica, se disuguali una conica.*

Part. 1. Sieno primieramente a, b [*fig.52.n.1.*] le projezioni orizzontali de' centri delle due sfere proposte uguali, del raggio R, ed a', b', le verticali; e sia f il punto ove la congiungente i loro centri, cioè l'asse del cilindro da circoscriverle, incontra il piano orizzontale, che dovrà essere il centro dell'ellisse in cui la superficie cilindrica incontra un tal piano, o sia la traccia di essa sul medesimo; ed il semiasse minore dell'ellisse sarà R, il maggiore si otterrà producendo fino alla LM in G' la tangente comune a' due cerchi de' centri a', b', nel piano verticale, e da G' tirando la perpendicolare $G'g$ alla LM fino alla ab; sarà fg un tal semiasse: sicchè essa potrà facilmente descriversi (*). Laonde essendosi esibita una tal traccia della superficie cilindrica, il cui asse è dato di sito, sarà questa data di sito (*n.*131.).

Part. 2. Sieno ora disuguali le sfere proposte de' raggi P, R, e P il maggiore, sicchè la superficie involgente le medesime debba risultar conica, e sieno a, b [*fig.52.n.2.*] le projezioni orizzontali de' centri delle medesime, a', b' le verticali.

S' intendan esse segate da un piano verticale per la ab, che vi segnerà i cerchi generatori delle medesime, e due lati del cono loro circoscritto; e sarà facile vedere, che facendosi $P - R : R :: ab : bc$, debba esser c la projezione orizzontale del vertice di quel cono, la cui corrispondente projezione verticale si avrà projettando c in c' sulla $a'\ b'$.

Or sieno QPC, QPC i lati superiore, ed inferiore segnati nella superficie conica da quel piano verticale, ed ABC l'asse del cono stesso, e queste tre rette incontrino la ab in-

(*) pr. 6. *Sez. Con.* vol. III. *Corso geom.*

definita ne'punti g, f, g, de' quali il punto f è dato (*pr.16.*), e ciascun degli altri si determinerà nel seguente modo. Essendo nota la BC, e' l raggio della sfera del centro B, sarà pur dato l' angolo in cui ciascuna delle due suddette tangenti s' inclina alla BC, che aggiunto, o tolto dall'angolo ACc risulterà dato quello, che ciascuna di esse tangenti comprende con la indefinita ac; e però i punti g, g rimarranno determinati, e quindi la gg, ch' è l' asse maggiore dell' ellisse, ed è la traccia orizzontale della superficie conica in quistione; ed il punto medio O ne sarà il centro. E projettati i punti g, g, in G′, G′, congiunte le G′c', G′c' saranno queste le corrispondenti projezioni verticali di quelle tangenti stesse.

Che se pel punto f s' intenda passare un piano perpendicolare all' asse del cono, cioè alla Cf, produrrà questo nella superficie conica un cerchio, il cui raggio, come rilevasi dal precedente ragionamento è dato. Ed essendo esso l' ordinata corrispondente nell' ellisse sopraddetta, alla distanza data Of dal centro O di questa, risulterà però ancor dato il semiasse minore della medesima, la quale potrà però descriversi nel piano orizzontale.

Laonde essendo, della richiesta superficie conica, data la traccia orizzontale, e le projezioni c, c' del suo vertice, essa sarà data (*n.132.*)

192. Scol. Per mezzo di questo lemma rimane ancor risoluto, senza cambiar piani di projezione, il problema di *tirare per un punto dato un piano tangente due sfere date*, già recato nella prop.61., ove avvertasi, che non fu esposto il caso particolarissimo delle sfere uguali, poichè intuitivamente riducevasi a tirare dal punto dato una retta parallela alla congiugnente i centri delle sfere date, e per questa un piano tangente l' una di esse.

PROPOSIZIONE LXIX.

PROBLEMA.

193. Tirare un piano tangente due sfere, ed una superficie di rivoluzione costante data di sito.

Si circoscriva alle due sfere date, se disuguali la superficie conica, se uguali la cilindrica, che le involga(*lem. pr.*); e poi si circoscriva alla superficie di rivoluzione la conica col vertice quello della già assegnata, o la cilindrica col lato parallelo alla congiungente i centri delle sfere (*lem. 3.*): il piano tangente tali due superficie coniche, o cilindriche sarà il richiesto. Sicchè non vi sarà bisogno per la dimandata soluzione del problema, che l' esibir graficamente la costruzione indicata.

CAPITOLO X.

DUE PROBLEMI DE' CONTATTI SFERICI.

194. A' casi già per incidenza considerati ne' lemmi 2 e 3 pel contatto di superficie curve tra loro, aggiugnerò, a fin d' illustrare la definizione 19 con alcun esempio, che direttamente la riguardi, la costruzione grafica del principal problema de'contatti sferici, quello di *descrivere una sfera, che ne tocchi quattro altre date di grandezza, e di sito*, rilevandola dall' artifizio geometrico col quale fu da me risoluta quest' intera famiglia di problemi, che presentai al pubblico fin dal 1809, che fu di nuovo riprodotta nel vol. I. degli Atti della nostra Reale Accademia delle scienze, ed ora il sarà più estesamente trattata, insieme a' contatti circolari, nel vol. III. degli *Opuscoli Matematici*.

Aggiugnerò ancora al problema soprindicato l' altro affine ad esso, *della sfera di un dato raggio, che ne tocchi tre altre date di grandezza, e di sito*, dandone la soluzione geometrica in doppio modo, per ciascun de' quali ottiensi immediatamente la grafica corrispondente, col solo eseguire in tal maniera le costruzioni in quella indicate. E poco appresso, in questa stessa parte I. del presente trattato, se ne vedrà altra costruzione ancor più agevole nell' esecuzione grafica, per mezzo de' luoghi alla superficie sferica, che riducesi alla semplicissima descrizione di tre cerchi nel piano de' centri delle tre sfere date.

I giovani si potranno poi da loro medesimi convenevolmente esercitare nel costruir graficamente gli altri problemi de' contatti sferici, camminando sulle orme delle corrispondenti soluzioni geometriche esibite ne' soprindicati volumi. E di alcuni di essi ne vedranno anche le analisi, e

le geometriche composizioni nel luogo stesso poc' anzi accennato.

DEFINIZIONE PEL SEGUENTE LEMMA.

195. *Se nella base di un triangolo, e dal punto medio di essa prendasi una terza proporzionale in ordine alla semibase, ed alla semidifferenza de' lati, la perpendicolare elevata su detta base dall' estremo di tal retta si dirà* Direttrice *di quel lato verso del quale questa si è presa.*

196. Così la base AB [*fig.53.*] del triangolo ADB si bisechi in C, e presavi la retta CP terza proporzionale dopo le due rette AC, ed $\frac{1}{2}$(DB—DA), si elevi ad AB dal punto P la perpendicolare PS; questa potrà chiamarsi la direttrice del lato AD, il quale colla PS è dalla stessa parte del punto C. E prendendovi C*p* uguale a CP, ed alzata dal punto *p* la *ps* perpendicolare ad AB, sarà la *ps* direttrice del lato DB, per esser le due rette *ps*, e DB dall' altra parte del punto C, cioè amendue a destra di C, come si vede.

LEMMA I. FONDAMENTALE (*).

197. *Se diasi la base* AB *del triangolo* ADB, *e la differenza de' lati di esso* DB, DA; *ciascuno di questi due lati avrà una data ragione alla perpendicolare abbassata dall' angolo verticale* D *sulla sua direttrice.*

DIM. CAS. 1. Col centro D, intervallo DA, che sia il minore de' due lati del proposto triangolo, si descriva il cer-

(*) Un tal lemma si è detto *fondamentale*, perchè base di tutte le soluzioni uniformi de' problemi de' contatti sì circolari, che sferici dal Fergola, e da me esibite.

chio EVA, e l'altro lato DB si prolunghi insino alla circonferenza in E, e si bisechi la BA in C, e la BV in G; sarà AC : BG :: BG : CP; e quindi $BG^2 = AC \times CP$, e prendendo i loro quadrupli anche $BV^2 = AB \times 2CP$. Ciò premesso, dal punto D si abbassi la DR perpendicolare ad AB, e vi si prenda C*r* uguale alla CR; sarà la rimanente parte *r*B uguale alla rimanente RA; e quindi R*r*, ch'è differenza delle due RB, *r*B, sarà uguale alla differenza de' due segmenti RB ed RA della base del triangolo, cioè alla BH. Vale a dire l'è $2CR = BH$, e $BH - 2CP = 2CR - 2CP = 2PR$.

Or per la natura del cerchio il rettangolo EBV è uguale all'altro ABH. Dunque togliendo da essi rispettivamente il quadrato di BV, o 'l suo uguale rettangolo di AB in 2CP, come si è dimostrato precedentemente, resterà il rettangolo EVB uguale all'altro di AB in BH — 2CP, cioè di AB in 2PR. E quindi sarà EV a 2PR, cioè, prendendone le metà loro, AD a DS, come AB a BV; la qual ragione è data.

Cas. 2. L'aggregato de' due rettangoli EBV, BV^2 è uguale alla somma degli altri due ABH, ed $AB \times 2PC$, che a quelli si sono mostrati rispettivamente uguali. Dunque sarà $2DB \times BV = AB(BH + 2PC) = AB(2CR + 2PC) = AB \times 2Rp$. E quindi starà DB ad R*p*, o alla sua uguale D*s*, nella data ragione della base AB alla BV differenza de' lati. *C.B.D.*

LEMMA II. PROBLEMATICO.

198. *Dato di posizione in punto* B [*fig.* 54.], *e la retta* AH *terminata in* H; *inclinare da quel punto su questa retta la* BC, *la quale stia al segmento* CH *troncatone da essa su di quella in una data ragione, cioè come la retta m all'altra n.*

SOLUZIONE GEOMETRICA.

Prendasi Hc uguale ad n; si congiunga la BH, e dal punto c si adatti sulla BH la cb uguale ad m. Di poi da B si conduca la BC parallela alla bc; sarà BC a CH, come bc a bH, pe' triangoli simili BCH, bcH, cioè come m ad n.

SOLUZIONE ANALITICA.

Dal punto B si abbassi la BK perpendicolare alla AH; poi pongasi BH$=a$, HK$=b$, BK$=e$, e KC$=x$. Sarà HC $=b-x$, e BC $=\sqrt{(c^2+x^2)}$. E per le condizioni del problema dovrà stare $\sqrt{(c^2+x^2)} : b-x :: m : n$; onde avrassi la seguente quadratica eqnazione

$$c^2+x^2=\frac{m^2}{n^2}(b-x)^2$$

Che agevolmente potrà ordinarsi, risolversi, e geometricamente costrnirsi. Ella intanto ha due radici, onde due punti dovranno rinvenirsi, quando il problema non sia impossibile. E due pnnti anche rilevansi dalla precedente soluzione gcometrica, ma nella BH, come la figura il mostra. E da essa rilevasi pnre intuitivamente, che i due casi riduconsi ad un solo, quando la m pareggi la perpendicolare da c abbassata sulla BH; e sieno impossibili quando ne sia minore.

LEMMA III. TEOR. LOCALE

199. *Tutti que' punti da ciascun de' quali abbassando le perpendicolari su tre piani di sito che s'incontrano, queste serbinsi tra loro costantamente la stessa ragione, che le tre rette date m, n, r, debbono essere allogati in una retta di sito.*

SOLUZIONE GEOMETRICA.

Sieno MN, RS, TV [*fig.* 55.], i tre piani dati di sito, e sia primieramente X nn punto dal quale abbassate su i due

di essi MN, RS le perpendicolari BX, CX, sieno queste tra loro come m ad n.

Si concepisca per la comune sezione RN di questi due piani, e per lo punto X condotto un altro piano, nel quale si prenda un qualsivoglia punto x, e si prolunghi la Xx, che unisce quel punto con questo, fino alla RN in Z, e poi congiungansi le BZ, CZ. Finalmente dal punto x su'piani MN, RS si abbassino le altre perpendicolari bx, cx, le quali è chiaro, che debbano cadere nelle BZ, CZ, ed esser quindi tra loro come le BX, CX, cioè nella ragione di m ad n. Quindi il piano RXN sarà il luogo geometrico di tutt'i punti X,x,*ec.* da'quali abbassate le perpendicolari su'piani dati MN, RS, sieno queste tra loro come m ad n.

Similmente il luogo geometrico di tutti que'punti da'quali abbassate le perpendicolari su' piani RS, TV, sieno queste tra loro nella ragione data di n ad r, si troverà essere un altro piano di sito condotto per la TS. Dunque la comune sezione di quel piano con questo sarà il luogo geometrico di que'punti da ciascun de'quali abbassandosi le perpendicolari su'tre piani di sito MN, RS, TV, sono esse tra loro nella ragione delle rette date m, n, r.

Ciò posto ecco in qual modo resterà determinato il sito del luogo geometrico suddetto. Poichè tutti que' punti da' quali abbassate le perpendicolari su i piani MN, RS, queste sono nella ragione data di m ad n, debbono essere allogati in un altro piano, che passa per la RN; sia X uno di tali punti [*fig.56.*], e si prolunghi la CX, una delle due perpendicori, quella al piano RS, finchè incontri l' altro piano MN; sarà data la ragione di BX ad XN, per esser dato di specie il triangolo BXN, in cui oltre l' angolo retto vi è dato l'angolo in N complemento di quello d' inclinazione de'piani dati: ma è anche data la ragione di BX a CX. Dunque è data la ragione di CX ad XN; e sarà perciò dato il punto X per dove passa il piano RXN [*fig.55.*]; che perciò un tal

piano sarà dato di sito (*). E similmente determinando il sito dell'altro piano, che passa per la TS, e ch'è il luogo geometrico di que' punti donde abbassando su i piani di sito RS, TV le perpendicolari, queste sono nella ragione data di $n:r$, si vedrà esser anche dato il sito della comune sezione di questi piani, ch' è il luogo geometrico in quistione.

LA STESSA GRAFICAMENTE.

200. Si prenda per piano orizzontale l'un de'tre piani dati, e sieno A'a, A'a' [*fig. 57.*] le tracce su questo dell' un de' due altri; B'b, B'b' quelle del rimanente di essi: indi preso nella LM un punto P', le si elevi la perpendicolare P'p' fino alla traccia A'a', e questa dividasi in x' nella ragion data, in cui rimaneva divisa, nella costruzione precedente, la perpendicolare al piano, che or fa da orizzontale, prodotta fino al piano aA'a', (cioè la ragion di CX : XN *fig.56.*) congiunta la A'x', sarà questa la traccia verticale del piano condotto per la A'a, ch'è il luogo de' punti da'quali abbassate al piano di projezione orizzontale, ed all' altro aA'a' le perpendicolari, sien queste sempre l' una all'altra come $m : n$. Similmente preso un'altro punto Q' nella LM, le si elevi la perpendicolare Q'q', fino alla traccia verticale $B'b'$ del piano bB'b', e si divida la Q'q' in y' nella ragione in cui rimaneva divisa, nella costruzione precedente, la perpendicolare al piano di projezione orizzontale, prolungata fino all' incontro col piano b B'b', congiunta la B'y' sarà questa la traccia verticale del piano b B'y', luogo de' punti donde tirate a quelli le perpendicolari, sono esse nella ragione di $m : r$; e l' intersezione de' due piani aA'x', bB'y' sarà la locale cercata; ond' è che, abbassate le perpendicolari rR', s'S' alla LM, avrà quella per projezioni rispettive le rS', s'R'; e sarà graficamente esibita.

(*) Poichè esso viene a passare per una retta, ad un punto di sito (*pr. 23.*).

201. Scol. Sia ora, in un caso particolare, ciascun de' tre piani dati perpendicolare al piano orizzontale, sul quale sieno A'*a*, B'*b*, C'*e* [*fig.58.*] le traece rispettive di essi; e le verticali venghino rappresentate dalle perpendicolari A'*a'*, B'*b'*, C'*e'* alla LM. E chiaro, che se pel punto *f*, intersezione delle A'*a*, B'*b* si conduca la locale *f*F' de' punti, da' quali tirate le perpendicolari alle A'*a*, B'*b* sieno queste come *m* : *n*, sarà tal retta la traccia orizzontale di quel piano verticale, ch'è il luogo de' punti analoghi rispetto a' piani *a* A'*a'*, *b* B'*b'*. Similmente, se dal punto *g* ove intersegansi le tracce orizzontali *a*A', *c*C' de' piani corrispondenti si tiri la *g*G' locale de' punti, da cui abbassate a quelle le perpendicolari, sieno queste tra loro come *m* : *r*; sarà essa la traccia orizzontale del piano verticale, ch'è il luogo de' punti corrispondenti relativi a' piani *a*A'*a'*, *e* C'*c'*. E però l' intersezione de' due piani verticali *f*F'*f'*, *g* G'*g'*, cioè la perpendicolare elevata, dall' intersezione *o* delle loro tracce orizzontali, a questo piano, sarà la locale cercata.

LEMMA IV. PROBLEMATICO.

202. *Determinare in una retta di sito un punto, il quale se congiungasi con un altro dato, e dal medesimo si abbassi la perpendicolare su di un piano di sito, sia quella congiungente in una data ragione a questa perpendicolare.*

SOLUZIONE GEOMETRICA.

Sia MN [*fig.59.*] il piano di sito, ed A il punto dato; e rappresenti O quel punto della retta di sito QO, dal quale abbassata sul piano MN la perpendicolare OP, e congiunta la OA, sien queste due rette tra loro nella data ragione di *m* : *n*.

S' intenda condotta per la retta di sito QO un piano perpendicolare al dato MN, dovrà in questo giacere la OP;

ed il triangolo POQ essendo dato di specie, sarà data la ragione di OP ad OQ. Ma è anche data la ragione di AO ad OP; quindi sarà pur data la ragione di AO ad OQ, che componesi da queste due: ond' è, che il problema proposto riducesi ad, inclinare dal dato punto A, fuori della retta di sito QO terminata in Q, a questa retta, la AO, che stia al segmento OQ, che da essa ne tronca, verso il punto Q, in una ragion data, cioè al lem. II.

LA STESSA GRAFICAMENTE.

203. Sieno SN, SN' [*fig. 60.*] le tracce del piano dato, e 'l piano verticale di projezione passi pel punto dato A, la cui projezione orizzontale A' cadrà nella LM: inoltre la retta di sito sia perpendicolare al piano di projezione orizzontale in *o*. Tirata da *o* alla MN la perpendicolare *op*, sarà questa la traccia orizzontale del piano, che passa per la retta di sito, ed è perpendicolare al dato, e la verticale corrispondente sarà la perpendicolare dal punto R', ove la *po* incontra la LM, elevata a questa nel piano di projezione verticale, la quale incontri la traccia corrispondente SN' del piano dato in *r'*; e projettato il punto *p* in P', e congiunta la P'*r'*, sarà questa la projezione verticale dell' intersezione *p r'* del piano dato coll' altro *p*R'*r'* condotto per la retta data, e nel quale esiste la perpendicolare a quello, che le si abbassa dal punto richiesto. Inoltre se dal punto *o* tirisi alla LM la perpendicolare *o*O'*q'* fino alla P'*r'*, rappresenterà *q'* la projezione verticale del punto d'incontro della retta di sito col piano dato. Adunque, se prendasi nella LM, dal punto O', la O'Q' uguale alla *op*, e giungasi la Q'*q'*; sarà il triangolo Q'*q'*O' identico a quello, che nella soluzione geometrica era dinotato da POQ [*fig. 59.*], e però otterrassi la ragione di OP : OQ rappresentata da quella di *q'*O' : *q'*Q'; e quindi avrassi ancor l' altra di AO : OQ.

Or espongasi separatamente la *o*A' quanto la congiungen-

te oA' nella figura, e da' punti o, A' elevinsi ad essa la perpendicolare oQ uguale alla $O'q'$, e la $A'A$ uguale alla $A'A$; indi si cerchi nella oQ un punto O, da cui condotta al punto A la OA, stia OQ : OA nell'assegnata ragione, e poi prendasi la $O'o'$ uguale alla oO; sarà o' la projezione verticale del punto cercato nella retta di sito, secondo le condizioni del lemma. Ed un tal punto rimarrà però graficamente assegnato (*pr.32.*).

PROPOSIZIONE LXX.

PROBLEMA.

204. Date quattro sfere di grandezza, e di sito, descriverne un' altra che le tocchi.

SOLUZIONE GEOMETRICA.

Sieno A, B, C, D [*fig.61.*] i centri delle sfere date, ed O il centro di quella da descriversi, il qual si congiunga co' centri delle date, per mezzo delle OA, OB, OC, OD, e si conducan pure le AB, AC, AD. Ciò posto, nel triangolo AOB, essendo data la base AB, e la differenza de' lati BO, OA; sarà dato il punto E della base, per dove passa la direttrice EF del lato AO (195), e quindi la ragione di un tal lato alla perpendicolare OF, che cade sulla EF (*lem.1.*). E perciò se facciasi passare per la EF un piano perpendicolare alla AB, un tal piano sarà dato di sito (*pr.32.*); e la perpendicolare OF alla EF essendo anche perpendicolare ad esso piano, sarà pur data la ragione di AO alla perpendicolare OF dal punto O abbassata su questo piano. Similmente dovrà esser data la ragione di AO alla perpendicolare OH, che dal punto O si abbassa su quel piano perpendicolare alla AC, il quale passa per la direttrice GH del lato AO nel triangolo AOC; e così pure è data l' altra ragione della AO alla

OL, che dal punto O si abbassa perpendicolarmente a quel piano normale alla AD, condottole per la direttrice KL del lato AO nel triangolo AOD. Quindi risulterà data la ragione delle tre perpendicolari OF, OH, OL; e perciò il punto O sarà allogato in una retta di sito (*lem.3.*). Ed il proposto problema si ridurrà ad inclinare dal dato punto A a questa retta di sito la AO, sicchè abbassata dal suo estremo O su quel piano, che passa per la EF, la perpendicolare OF, sia data la ragione di AO ad OF, cioè al precedente lemma problematico.

La stessa graficamente costruita.

205. Prendasi per piano di projezione orizzontale quello condotto pe' centri A, B, C [*fig.62.*] di tre delle sfere date, e passi il verticale per quello D della quarta sfera, e per l' altro B dell' una delle precedenti, prendendo quella, che faccia risultare i centri A, C delle altre due da una medesima parte della comune sezione LM de' piani di projezione; ed abbassate da' punti D, A le perpendicolari DD′, AA′ alla LM, si congiungano le AD′, A′D, che saranno le projezioni della congiungente AD nello spazio i centri delle sfere A, D; ed uniscansi pure le AB, AC.

Sia inoltre O il centro della sfera richiesta, e supposte congiunte le OA, OB, OC, OD, saranno dati nelle basi AB, AC, AD de' triangoli AOB, AOC, AOD i punti F, G, K, per dove passano le direttrici dello stesso loro comune lato AO, de' quali i due E, G assegnati come nella definizione al *n.* 195 appariscono effettivamente segnati nel piano orizzontale, e dell' altro K, ch' è nello spazio si otterranno le projezioni nel seguento modo. È chiaro che le AD, AD′ risultino similmente divise dalle perpendicolari da' punti dell' una abbassate sull' altra, e però ottenuto il punto K nella AD, con la proporzione indicata nel *n.*195, per averne la corrispondente projezione orizzontale, basterà dividere la AD′ in *k*

proporzionalmente ad AK , KD ; indi abbassata da k sulla LM la perpendicolare kK′ prodotta fino alla A′D, sarà k' la corrispondente projezione verticale del punto K . Adunque saranno ancor dati di sito i piani, che per le anzidette direttrici del lato AO , e però pe' punti E , G , K , si condncono perpendicolarmente alle rette AB, AC, AD, de'quali i primi due , risultando verticali , hanno per loro tracce orizzontali le stesse rette EF, GH, per verticali corrispondenti le perpendicolari elevate alla LM da' punti F , H ; e quelle del terzo piano , cioè del perpendicolare alla AD in K, senza nè men ricorrere alla costruzione della prop.32 , si assegneranno nella seguente facilissima maniera , cioè. Dovendo un tal piano intersegare quello del triangolo ADD′ in una retta Kn perpendicolare alla AD , sarà retto l'angolo AKn , e però assegnando la Kn terza proporzionale in ordine ad Ak , e kK , o sia K′k', che sono date, si otterrà il punto n, per dove passa la traccia orizzontale di quel piano ; e questa verrà rappresentata dalla perpendicolare nN′ alla AD′ (88) ; e la verticale sarà la N′n' tirata da N′ perpendicolarmente alla A′D.

Or essendosi graficamente assegnato il sito di questi tre piani, sarà similmente determinabile la retta di sito , ch'è il luogo de'punti da ciascun de'quali abbassate le perpendicolari su di essi,queste risultino in date ragioni tra loro (200); e potrà ancora graficamente assegnarsi in questa il pnnto , che congiunto con A, ed abbassata dal medesimo su di uno de' piani, quello EF′f', la perpendicolare, stia la congiungente a questa perpendicolare in data ragione (*lem.4.*). Ed un tal punto è precisamente il centro O della sfera cercata ; che rimarrà quindi graficamente assegnato.

PROPOSIZIONE LXXI.

PROBLEMA.

206. Descrivere una sfera di un dato raggio la quale tocchi tre sfere date di grandezza, e di sito.

Soluzione geometrica.

I centri A,B,C [*fig. 63.*] delle tre sfere date congiungansi tra loro, con le AB,AC,BC, e con quello O della sfera da descriversi, per le OA,OB,OC; saranno dati di sito i piani, che passano per le direttrici EF,GH del lato AO ne' triangoli AOB,AOC, i quali piani essendo perpendicolari alle AB, AC ne'punti E, G, risultano verticali, e quindi facilmente assegnabili. Come pure sarà dato quell'altro piano verticale, che passando per la direttrice KN del lato CO nel triangolo COB, incontra perpendicolarmente la CB base di questo in K. Or son date le ragioni della AO alle perpendicolari tirate da O su' piani verticali per le EF, GH; ed è pur data la ragione di AO a CO, per esser data ciascuna di tali rette, risultante dal raggio di una delle sfere date intorno a'centri A,C, e da quello pur dato della sfera da descriversi; come anche l' altra di CO alla perpendicolare, che da O si tira al piano verticale, che passa per la direttrice corrispondente ad un tal lato nel triangolo BOC. Laonde sarà data ancor la ragione di AO a questa perpendicolare; e però saran date le ragioni delle tre dette perpendicolari tra loro. Dopo di che la soluzione procede del tutto come quella del problema precedente.

ALITER.

207. Dal centro O [*fig. 64.*] della sfera da descriversi s' intenda abbassata sul piano BAC delle congiungenti i centri delle tre sfere date la perpendicolare O*o*, e dal punto *o* alle AB, AC s' intendan tirate le perpendicolari *o*E, *o*F.

E poichè [*fig.64*] $AO^2 - OB^2 = Ao^2 - oB^2$, e quindi ad $AE^2 - EB^2$, sarà data la differenza $AE^2 - EB^2$, che dicasi M^2; e però sarà dato il punto E nella BC. Imperocchè essendo $AE^2 - EB^2 = M^2$, sarà $AB \times (AE - EB) = M^2$, e perciò $AB : M :: M : AE - EB$. Laonde sarà data la $AE - EB$, e per conseguenza il punto E. Adunque si saprà la locale E*o* del punto *o*.

E determinando similmente l'altra locale F*o* dello stesso punto *o*, si farà noto il punto *o*, per conseguenza la *o*E; e finalmente l'altezza *o*O della piramide si otterrà dall'ipotenusa AO data, e dal dato cateto A*o*.

208. Scol. La costruzione grafica corrispondente alla prima soluzione geometrica del presente problema si esegue, del pari che questa, analogamente alla costruzione grafica del problema delle quattro sfere; ed ancor più facilmente, non essendo bisogno della costruzione ivi indicata, per assegnare il terzo piano di sito perpendicolare alla BC in K, che quì è ancor esso verticale. E ciò mostra le fecondità del principio rinvenuto dal Fergola per l'uniforme soluzione de' problemi delle *Tazioni*, e da me esteso a' contatti sferici. E potrà ancora simplificarsi l'andamento della presente costruzione, nel ricercare le locali de' punti, da' quali abbassando su' tre piani di sito le perpendicolari, sieno queste in ragioni date, operando come vedesi nello scolio al *n*.201.

L'altra costruzione grafica, per la seconda soluzione di sopra recata, si riduce all'elementarissima esibizione di un punto, di cui n'è data la projezione su di un piano, e la corrispondente altezza.

CAPITOLO XI.

DEGL' INCONTRI DI UNA RETTA DI SITO CON UNA SUPERFICIE SIMILMENTE DATA.

209. Dovendo trattare l' argomento delle intersezioni delle superficie curve, donde non solamente ritraggono grandissimo vantaggio la Prospettiva, la Gnomonica, l' Architettura, e le costruzioni in generale, ma l' astratta Geometria ancora, per que' problemi, che de' luoghi alla superficie abbisognano per la loro soluzione, e de' quali alcun esempio recheremo in appresso ad illustrare il presente argomento, abbiamo stimato conveniente all'ordine scientifico elementare il dividere tal materia in più capitoli. E nel primo di essi, ch'è il presente, tratteremo degl' incontri di una linea retta di sito con una superficie cilindrica, conica, o di rivoluzione, data anche di sito, tralasciando il caso semplicissimo dell'incontro col piano; poichè già considerato nella prop. 30.

Nel seguente capitolo esporremo le intersezioni delle superficie stesse con un piano di sito, ove cadrà in acconcio considerare alcune speciali principalissime affezioni di tali intersezioni, non solamente utili alle presenti ricerche, per agevolarne le costruzioni in taluni casi speciali; ma ancora spesso occorrenti in altri geometrici problemi. Le costruzioni, che espongonsi in questi due capitoli dovevano apparir separatamente in una trattazione elementare di Geometria di sito, costituente la parte di essa conosciuta per la *Geometria descrittiva*; poichè esse non sono sì semplici, e sì immediatamente eseguibili, che si potessero, senza detrimento dell' eleganza geometrica, incastonare ne' luoghi ove occorrevano. E del ripiego da noi adottato si vedrà subito il vantaggio, nelle ricerche seguenti dello stesso ar-

gomento. Formeranno il soggetto dell' altro capitolo le intersezioni delle superficie cilindriche, e coniche tra loro. E finalmente dell' ultimo di essi, il XIV, quelle delle superficie di rivoluzione costante tra loro, e con le cilindriche, e coniche.

Le altre materie di complemento riguardanti l' argomento medesimo, saranno recate ne' loro proprj luoghi della parte II. del presente trattato. E quivi, ed in tutto quello che ora esporremo, si vedranno, per le vie della pura Geometria rilevate molte ricerche, ordinariamente trattate con la moderna analisi pura *a tre coordinate*; il che riescirà utilissimo a comprovar queste, e corredarle della corrispondente costruzione grafica, senza la quale esse rimanevansi sterili, ed astratte considerazioni. Sta il perfezionamento delle Matematiche nella corrispondenza continua di questi due grandi mezzi, ch' esse posseggono per l' invenzione; ed il privarsi dell' un di essi, dando tutto all' altro, l' è come di chi pretendesse volarsi meglio, e più sublime, tarpando l' una delle due ali, ed impiumando di più l' altra.

PROPOSIZIONE LXXII.

PROBLEMA.

210. Costruire gl' incontri di una data retta di sito, con una superficie cilindrica similmente data.

Rappresenti *abc* [*fig.65.*] la traccia orizzontale della superficie cilindrica, la cui retta generatrice abbia per projezioni le *b*D′, B′*d*′; e sieno *ef*, E′*f*′ le projezioni, orizzontale e verticale, della retta di sito, il cui incontro col piano orizzontale sia il punto *e* (*pr.16.*): e preso in essa un qualunque punto, le cui projezioni sieno *f*, *f*′, s' intenda per questo tirata una retta parallela alla generatrice della superficie ci-

lindrica (*pr. 37.*) ; e ne sieno $f'G'$, fg le corrispondenti projezioni , e g il punto ov'essa incontra il piano orizzontale ; congiunta la eg , sarà questa la traccia orizzontale del piano condotto per la retta data , e per la parallela tirata dal punto F di essa alla generatrice della superficie cilindrica, nel qual piano dovendo avvenire l' incontro di quella retta con questa superficie , se mai sia possibile, esso dovrà aver luogo , com' è chiaro, nel lato , che passa per un punto a ove la ge incontra la traccia abc ; di tal che tanti saranno gl' incontri della retta con la superficie cilindrica , quanti saranno i punti a : e laddove la gc non interseghi la traccia abc , la retta proposta non incontrerà la superficie cilindrica . Laonde per determinar ciascuo di tali incontri , bisognerà assegnare quelli del lato , che passa per un punto a, di cui sono date le projezioni ah , $A'h'$, e la data retta di sito (*pr. 18.*).

Ed il presente problema rimarrà per tal modo compiutamente risoluto.

PROPOSIZIONE LXXIII.

PROBLEMA.

211. Costruire l' intersezione di una data retta di sito con una superficie conica ancor data di sito.

Sieno abd [*fig.66.*] la traccia orizzontale dolla superficie conica , ed a, a' le projezioni del suo vertice ; ef, $E'f'$ quelle della retta di sito , che incontri il piano orizzontale in e (*pr.16.*) ; e preso in tal retta un qualunque punto F , lo cui projezioni sieno f, f', congiungansi le fa , $f'a'$, che saranno le projezioni della congiungente un tal punto col vertice A del cono, e questa incontri in g il piano orizzontale(*pr.16.*); sarà eg la traccia corrispondente di quel piano , che passa

per la retta proposta, e per questa congiungente, e quindi pel vertice del cono, nel quale dovendo accadere gl' incontri di quella retta con la superficie conica, essi avranno luogo in que' lati, che passano per gl' incontri della traccia orizzontale di tal superficie con quella *eg* del piano anzidetto; e tanti saranno quegl' incontri, quanti questi, o non ve ne sarà alcuno se la *eg* non incontri affatto la curva *cbd*. Adunque se l'un di questi punti *b* si projetti verticalmente in B', e congiungansi le *ba*, B'*a'*; gl' incontri *h*, *h'* di queste rispettivamente con le projezioni della retta data, saranno le projezioni di un incontro di essa con la superficie conica, e così degli altri, se abbian luogo.

LEMMA

212 *Se una superficie di rivoluzione seghisi con un piano parallelo al suo asse; la sezione dovrà essere una curva simile alla generatrice.*

Sia BCA [*fig.* 67.] la generatrice della superficie curva nel piano condotto per l' asse OA, e pel diametro BOC del cerchio BDCB, che ne rappresenta la direttrice per un qualunque punto O dell' asse; ed il piano segante passi per la retta *bc* parallela alla BC, producendo in quella superficie la curva *bac*.

Si tiri l' altro diametro DOE perpendicolare alla *bc*, che la bisecherà in *o*; e per le DOE, OA s' intenda condotto il piano DAC, che segnerà nella superficie proposta l' altra generatrice DAE identica alla BAC, e nel piano *bae* la retta *ao* perpendicolare alla *boc* in *o*, e che sarà l'asse della curva *bac*, ed *a* il vertice di questa, per cui conducasi la *a*F parallela alla OE.

Ciò posto, qualunque sia la natura della curva DAE, la sua ordinata OE, ed il quadrato di questa dovrà risultar sempre, nel medesimo modo, dall' ascissa OA, o da una sua po-

tenza con altre quantità date combinata ; e però nell'identico modo dovrà risultare la differenza de'quadrati delle OE , F*a* nella differenza dell'ascisse OA,AF, cioè nella OF, o sia *oa*; vale a dire la differenza de' quadrati delle OE , F*a* , o pure O*o*,cioè il rettangolo D*o*E, o sia il quadrato di *bo*,sarà rappresentato nella *oa* in modo identico a come è rappresentato il rettangolo DOE , o sia il quadrato di BO, nella OA.

Laonde le ordinate della curva *bac* essendo rappresentate nelle loro ascisse nell' identica maniera , che quelle della curva BAC ; tali due curve dovranno esser simili.

ALITER.

213. Volendo adottare in tal dimostrazione il linguaggio degli analisti,essa rimarrebbe nel seguente modo abbreviata.

Per la natura della curva DAE, o BAC , le OE , F*a* sono funzioni simili delle OA, AF, e così i loro quadrati ; onde la differenza de' quadrati delle OE , O*o* , cioè il rettangolo D*o*E , o il quadrato di *bo* risulterà ancora una simile funzione della differenza delle ascisse OA , AF , cioè della *ao* ; e quindi le ordinate BO , *bo* nelle due curve BAC , *bac* risultando funzioni simili delle ascisse corrispondenti AO,*ao*, esse curve saranno simili.

214. Scol. Per maggiormente illustrare il presente lemma , suppongasi la generatrice ABC esser una parabola del parametro P : il rettangolo D*o*E , o sia bo^2, sarebbe in tal caso risultato uguale al rettangolo di *oa* in P , cioè la curva *bac* sarebbe un' altra parabola dello stesso parametro , e però identica a quella.

Che se la generatrice BAC fosse stata un'ellisse intorno all'un de'semiassi AO, tal che OE ne sarebbe stato l' altro; si vede , che i rettangoli di DO in OE , e di D*o* in *o*E, o sia i quadrati di BO, *b o* risulterebbero come gli altri delle OA, *oa* ; e però le due ellissi simili tra loro.

Lo stesso per le iperboli , sia che la rivoluzione avvenisse

intorno all' asse primario, o al secondario, da generare perciò il conoide iperbolico, o il cilindroide.

PROPOSIZIONE LXXIV.

PROBLEMA.

215. Costruire gl'incontri di una retta di sito con una superficie di rivoluzione costante ancor data di sito.

L' asse della superficie data prendasi perpendicolare in O [*fig.68.*] al piano di projezione orizzontale, ed il verticale sia quello, che passando per un tal asse è parallelo alla retta di sito (*pr.39.*), le cui projezioni sieno però la $p'q'$, e la pq parallela alla comune sezione LM de' piani di projezione; ed essa interseghi il cerchio B'EC' segnato dalla superficie di rivoluzione nel piano orizzontale. Sia inoltre B'AC' la generatrice della superficie data nel piano verticale.

Or s' intenda condotto per la pq il piano parallelo al verticale di projezione, segherà questo la proposta superficie in una curva simile alla B'AC' (*lem. prec.*) ed identica alla sua projezione verticale; e questa si descriverà facilmente nel seguente modo. Da' punti p, q, abbassando le perpendicolari pP', qQ' alla LM, sarà P'Q' l' ordinata di essa curva pel punto O, e l' ascissa corrispondente si otterrà prendendo sulla LM, dal punto O, la OH' uguale alla Oo, elevandole da H' la perpendicolare H'h', e pel punto h' ove questa interseca la curva B'AC' tirando la parallela alla LM, il punto a' ove questa interseca la AO, sarà la projezione verticale del vertice di tal curva, la quale si descriverà per punti nel modo assegnato nel *n.*129, se pure, essendone conosciuta la natura, non si abbia qualche mezzo meccanico da descriverla con un movimento continuato. E descritta una tal

curva P'a'Q', identica a quella effettiva di sezione, che gli è parallela, e nel cui piano esiste la retta data di sito; i punti r', r' ov'essa rimarrà intersegata dalla projezione $p'q'$ di tal retta, saranno le projezioni corrispondenti de' punti d'incontro di essa con la superficie proposta di rivoluzione. Laonde projettati i punti r', r' sulla pq in r, r nel piano orizzontale, si avranno de' medesimi le corrispondenti projezioni orizzontali; ond'è ch'essi rimarranno graficamente assegnati.

CAPITOLO XII.

DELLE INTERSEZIONI DI UN PIANO CON UNA SUPERFICIE CILINDRICA, CONICA, O DI RIVOLUZIONE COSTANTE.

216. Per la materia del presente capitolo, occorrendo alcune verità altrove non dimostrate, le recheremo in tanti teoremi, che saranno ancora utili ad altre ricerche; ond' è che il trovar quì essi un luogo a proposito, riesce ancor vantaggioso per l' invenzione geometrica.

TEOREMA I.

217. *Le sezioni prodotte in una superficie cilindrica da piani paralleli, sono tutte identiche tra loro.*

Ciò sebbene chiaro della genesi della superficie cilindrica, potrà anche dimostrarsi nel seguente modo.

Sieno ABCD, *abcd* [*fig. 69.*] due sezioni prodotte in una superficie cilindrica da piani paralleli, ed A, B, C . . . *a*, *b*, *c* . . . gli estremi corrispondenti in esse di tre lati di quella; congiunte le CB, BA; *cb*, *ba*, dovranno queste risultar rispettivamente uguali, cioè CB = *cb*, AB = *ab*; ed inoltre sarà l' angolo ABC = *a b c* (*15.El.XI.*) . E così continuandosi per altri lati in seguito, verranno ad iscriversi in tali sezioni due poligoni, i quali svanendo nelle medesime, quando i punti A, B, C, e gli altri corrispondenti *a*, *b*, *c* . . suppongansi prossimissimi; ne segue, che ancora le sezioni ABCD, *abcd* debbano essere identiche.

218. Cor. Quindi ogni sezione prodotta in una superficie cilindrica, da un piano parallelo a quello della sua traccia, dovrà risultare identica a questa.

219. Scol. E se la generatrice fosse perpendicolare a tal piano, la projezione su di esso di qualunque sezione prodotta da piani paralleli al medesimo, sarà la stessa traccia della superficie cilindrica : ma se quella sia obbliqua al piano di projezione , per assegnare su questo quella delle sezione prodotta nella superficie cilindrica , basterà abbassare da un punto qualunque *b* [*fig. 69.*] della sezione *abcd* la perpendicolare *b*K sul piano della direttrice ABCD , e congiunto l' altro estremo B di quel lato , che passa per *b* , ed è nella traccia della superficie proposta , col punto K piede della perpendicolare suddetta , prolungar la AK , finchè K*k* pareggi BD corda nella direttrice ABCD corrispondente al punto B . Indi tirata per un qualunque altro punto A della ABCD la AX parallela alla BY, e presa da essa la AP = BK, si tagli sulla medesima , dal punto P , la P*p* uguale alla AE corda corrispondente nella traccia ABCD ; la curva che passa pe' punti K , *k* , e per tutti gli altri P , *p* così determinati sarà la projezione cercata dalla sezione *abcd*.

TEOREMA II.

220. *Comunque seghisi da un piano una superficie cilindrica , la sezione , che vi si produce è del genere stesso della direttrice di quella superficie .*

Rappresenti ABCD [*fig. 70.*] la direttrice della superficie cilindrica, ed AH la retta generatrice di essa; e sia RQP il piano segante, il quale incontri quello della direttrice nella retta QP; e sieno A*ad*D , B*bc*C due piani paralleli condotti pe' lati della superficie cilindrica , i quali interseghino il piano PQR nelle QR,ST, ed il piano della direttrice nelle QD,SC ; risulteranno simili i triangoli QD*d*,SC*c*,QA*a*,SB*b*, e però le ordinate AD , BC nella curva ABCD saranno proporzionali alle corrispondenti *ad* , *bc* nella sezione *abcd*.

Laonde da ciascuna della prima si passerà a ciascuna corrispondente della seconda moltiplicandola per un rapporto, o cofficiente costante n, il quale non alterando in alcun modo il grado, e la forma dell' equazione alla prima curva ABCD ove per la y vi s' introduca la ny, farà sì, che la nuova equazione corrispondente alla curva $abcd$ le sia anologa, e però questa della stessa natura, che la ABCD.

221. Scol. Adunque tutte le sezioni prodotte da piani in una superficie cilindrica debbono esser curve dello stesso genere. E però se una tal superficie avesse avuta per direttrice un cerchio, le sezioni dovranno essere ellissi di diversa grandezza (*), e quelle prodottevi da piani paralleli identiche tra loro; nè potranno esservi altre sezioni circolari, che nel solo cilindro obbliquo, come or ora mostreremo. E nel caso che il cilindro sia a base ellittica le sezioni prodottevi potranno essere ancor ellissi, o pur cerchi. Sul qual proposito stabiliremo i seguenti teoremi necessarj a dilucidare questo argomento, che non solamente può occorrere in ricerche geometriche; ma serve in varie applicazioni della *Geometria descrittiva*.

TEOREMA III.

222. *In un cilindro retto a base circolare non vi può essere alcuna sezione, che sia cerchio, oltre le parallele alla base.*

Imperocchè rappresenti AB [*fig.71.*] quel diametro del cerchio ABC, base del cilindro, ch' è perpendicolare alla traccia QP del piano segante PQR, nel piano del cerchio, sarà ab un diametro delle sezione corrispondente ad AB, il quale è sempre maggiore di quello, che gli è perpendicolare nel punto medio o, projettato nel centro del cerchio, e ch' è quanto

(*) Rimangono da ciò comprovate le costruzioni de' problemi 65, 67, e lemma IV. al n. 191.

il raggio di esso cerchio. Adunque una tal sezione non potrà essere, che un' ellisse (221) dell' asse maggiore ab, e del minore quanto il diametro del cerchio base.

123. Cor. E si vedrà facilmente, che l' asse maggiore di quell' ellisse stia al minore, o al diametro AB del cerchio, che ne rappresenta la projezione, come il raggio trigonometrico al coseno dell' angolo in cui inclinasi il piano segante la superficie cilindrica a quello della costei base.

Il che potrà servire a sceglier tali piani seganti le superficie cilindriche a direttrici circolari, sicchè le projezioni risultino cerchi.

TEOREMA IV.

224. *Nel cilindro a base ellittica possono aver luogo, per ogni punto dell' asse, due sezioni circolari.*

Cas. 1. Sia esso primieramente retto, e rappresenti ACB [*fig.72.n.1.*] la semiellisse direttrice della superficie cilindrica, col semiasse maggiore OC, ed ABba il piano normale condotto per l' asse minore AOB, al quale dovrà risultar perpendicolare quello, che produca in essa una sezione circolare, se mai ve ne abbia, affinchè i piani verticali, condotti per le ordinate ED dell' ellisse direttrice, dieno le ordinate corrispondenti nel cerchio perpendicolari al diametro di esso, che risulterà dall'intersezione del piano segante col piano ABba. Or preso nell' asse della superficie cilindrica un qualunque punto o, si descriva da questo col raggio quanto OC il cerchio $a'b\,b'a$, il quale interseghierà i lati Aa, Bb ne' punti a, b', a', b; poichè il raggio OC è maggiore di OB, cioè della distanza tra Oo, ed Aa, Bb: ed è evidente, che i piani condotti per le ab, $a'b'$ perpendicolarmente a quello per le Aa, Bb debban produrre nella superficie cilindrica proposta due sezioni circolari.

E tal costruzione non potendosi effettuare per qualsivogliano due diametri dell' ellisse, poichè non posti ad angolo retto, come avviene pe' soli assi, ne segue, che oltre le due già dette sezioni circolari, e le parallele ad esse (217), non possano esservene altre.

Cas. 2. Sia ora obbliqua la superficie cilindrica proposta, e s' intenda segata da un piano pel punto O [*fig. 72. n. 2.*] perpendicolare a quello della sezione per l' asse AB*ba*, il quale dovrà produrre nella superficie cilindrica un' altra sezione ellittica A'C'B', che potrà pure esser cerchio in un caso; e per tal modo riducendosi il proposto cilindro obbliquo a retto, la dimostrazione dell' assunto rientrerà in quella del caso 1.

TEOREMA V.

225. *Segando una superficie conica con piani paralleli; le sezioni risulteranno curve simili tra loro.*

Una tal verità risulta anche dalla genesi della superficie conica; e può pure dimostrarsi nel seguente modo.

Sieno RA, RB, RC [*fig. 73.*] tre lati della superficie conica, i quali incontrino il perimetro di una delle sezioni parallele fatte in essa ne' punti A, B, C, quello dell' altra in *a*, *b*, *c*, e giungansi le AB, BC, *ab*, *bc*, risulteranno queste rispettivamente parallele (*16. El. XI.*), e gli angoli ABC, *abc* uguali (*15. El. XI.*); ed i triangoli BRC, *brc* essendo simili, sarà AB : *ab* :: RB : R*b*. Ed essendo, per gli altri triangoli simili RBC, R*bc*, RB : R*b* :: BC : *bc*; si avrà BA : *ba* :: BC : *bc*, e permutando BA : BC :: *ba* : *bc*. E lo stesso continuandosi a dimostrare per altri lati successivi tirati nella superficie conica, risulteranno iscritti nelle curve sezioni ABCD, *abcd* due poligoni equiangoli, e co' lati proporzionali intorno agli angoli uguali, e però simili; i quali sva-

nendo in quelle curve, quando que' lati suppongansi evanescenti, ne risulterà, che sieno queste ancor simili tra loro.

226. Cor. Adunque le sezioni prodotte in una superficie conica da piani paralleli a quello ov' è segnata la traccia, o direttrice di essa, saranno curve simili a tal traccia. Ed esse si descriveranno facilmente nel piano di questa, col mezzo del cor. al *n*.129, e nel modo, che verrà specificato quì appresso.

227. Scol. Il piano della sezione *abcd* parallela alla traccia ABCD della superficie conica, il cui vertice sia R, incontri l' altezza RR′ di essa in *r*, è chiaro, che condotta da R una qualunque inclinata R′B alla traccia ABCD, e congiunto il lato RB, e la *r′b*, debba stare R′B : *r′b* :: RR′ : R*r*′. Ciò posto, se facciasi RR′ : R*r*′ :: R′B : R′*b*′ :: R′D : R′*d*′, i punti *b*′, *d*′, e tutti gli altri in tal modo determinati, si apparterranno ad una curva simile alla ABCD (cor. al *n*.129), ed identica alla *abcd*, di cui ne sarà anche la projezione sul piano della traccia ABCD.

Principio pel seguente lemma.

228. *Due curve di diversa natura non possono mai, ravvicinandosi co' loro perimetri, confondersi l' una nell' altra.*

Dilucid. Imperocchè essendo esse di diversa natura, non potrà mai l' una scambiarsi nell' altra pel semplice ravvicinamento; sicchè, per un esempio, essendo l' una intersegabile da una retta nel numero *n* di punti, l' altra nel numero $n + m$; quella avvicinandosi a questa potesse acquistare di più quel numero *m* d' intersezioni, che erano ad essa incompatibili.

O pure essendo l' equazione dell' una di esse al grado *n*, l' altra al grado $n + m$, l' una non potrà mai acquistare da se quel numero *m* di più di dimensioni, nè perderle questa, sicchè giugnessero ad essere identiche, e quindi a svanire l' una nell' altra.

**

229. Cor. Laonde ogni qual volta due curve possano in un qualunque modo pervenire a confondersi, esse non potranno essere, che della stessa natura, come avviene delle diverse curve segate in una superficie cilindrica (*teor.2.n.*220).

TEOREMA VI.

230. *Comunque seghisi con un piano una superficie conica, la sezione è sempre della stessa natura, che la direttrice.*

Il piano PQS [*fig. 74.*] segando la superficie conica RACB, che ha per direttrice la curva ABC, nel piano TQS, vi produca le sezione *abc* ; è chiaro, che, intendendo rivolgersi il piano PQS intorno alla comune sezione QS col piano TQS, finchè coincida con questo, vi produrrà continuamente altre sezioni, delle quali l' ultima sarà la stessa ABC. Adunque pel cor. prec. la curva *abc*, come qualunque altra delle sezioni prodotte nella superficie conica dal piano segante PAS, o da un altro piano, dovranno essere della stessa natura, che la curva ABC.

231. Scol. Una tal proprietà rimane confermata dal conoscersi già, che nella superficie conica a base circolare, le curve prodottevi da un piano, che la seghi ne' diversi modi, che può ciò avvenire, sieno curve di uno stesso ordine. E come che tra esse han luogo le ellissi, potrebbesi, prendendo per direttrice l' una di queste, applicare al cono a base ellittica la medesima genesi di curve coniche. Ma ciò verrà ancor meglio comprovato dal seguente

TEOREMA VII.

232. *In ogni cono a base ellittica, può sempre condursi, pel centro della base, un piano, che produca nella superficie conica una sezione circolare.*

Cas. 1. Sia BCB'C' [*fig. 75.*] la base ellittica di un cono, che suppongasi retto; e congiunto il suo vertice A col centro O dell' ellisse, i cui assi sieno CC', BB', sarà CO perpendicolare alle AO, BO, e quindi al triangolo per l'asse BAB', e però a qualunque retta si tiri dal punto O nel piano di tal triangolo; e per conseguenza anche alla NON' condotta tra' lati AB, AB' di questo, con la condizione, che sia $OC^2 = ON \times ON'$; nel qual caso il piano per le CO, NON' produrrà nella superficie conica una sezione circolare.

Cas. 2. Che se il cono proposto fosse scaleno, conducendosi pel centro O un piano perpendicolare all' asse AO, questo vi produrrà generalmente una sezione ellittica (*teor. 6.*), trasmutandolo in quello precedentemente considerato, se pur da esso non ne fosse risultato a dirittura la circolare.

Adunque *ec.*

233. Cor. Risulta dalla precedente dimostrazione, che il cono a base circolare, e quello a base ellittica non sono, che una medesima cosa, che si diversifica dalla sezione, che prendesi per base. E lo stesso potrebbe ancor dimostrarsi per quelli a base parabolica, o iperbolica.

234. Scol. Nel cono a base circolare, è già noto dalle *Sez. Con.* (§§. 17, 24, 25, 27 vol. III. *Cors. geom.*) potersi ottenere, secondo il modo di segarlo, le così dette *sezioni*, o curve coniche; ed in quello obbliquo anche un' altra serie di sezioni circolari diversa dalle parallele alla base, che diconsi *succontrarie*: e poichè ogni cono a base ellittica può ridursi a quello a base circolare, assegnando in esso, tra le infinite sezioni ellittiche quella che sia cerchio, come or ora abbiamo dimostra-

to ; però si potrà egualmente conchiuder per questo ciò, che finora si è detto del primo , essendo essi sempre una sola , e stessa superficie conica.

PROPOSIZIONE LXXV.

PROBLEMA.

235. Costruire l' intersezione di una data superficie cilindrica , con un piano di sito , perpendicolare a quello di projezione verticale (*).

Cas. 1. La generatrice della superficie cilindrica sia primieramente perpendicolare al piano orizzontale , in cui ne rappresenti *ceh* [*fig,76. n.1.*] la traccia di quella , che sarà anche la projezione della curva segnatavi dal piano segante , nella cui traccia verticale F'*f'* cadrà la projezione della curva di sezione . E però avendosi le projezioni orizzontale , e verticale della proposta intersezione, ne sarà di essa dato il sito , e la configurazione (*pr.34.*)

Cas.2. Che se la generatrice pongasi obbliqua al piano orizzontale , ove ne sia *ceh* [*fig.76.n.2.*] la traccia della superficie cilindrica, ed *f*F', perpendicolare alla LM , quella del piano segante, cui siesi stabilito perpendicolare il piano di projezione verticale: in tal caso preso nella traccia *ceh* un qualunque punto *n* , si assegnino le projezioni *no*, N'*o'* del lato della superficie cilindrica passante per *n*; di esse la verticale N'*o'* intersegando la F'*f'* vi segnerà il punto *p'* projezione verticale di quello P, in dove un tal lato incontrava la curva di sezione, cioè del punto P di questa; e projettato il pun-

(*) Siccome può sempre darsi luogo a questa condiziono , senza render particolare il problema , l' abbiamo stabilita nel proporlo . Lo stesso pe' seguenti due .

to p' in p sulla no, ne sarà p la corrispondente projezione orizzontale. Determinando similmente la projezione orizzontale di ogni altro punto di quella sezione, si verrà ad ottenere la sua projezione orizzontale rappresentata dalla curva, che passa per tutti siffatti punti. E la verticale per ciascuna parte di essa, o per tutta, se sarà terminata, cadrà nella $F'f'$; e vi sarà terminata ne' punti ove essa viene incontrata dalle tangenti la traccia orizzontale cch perpendicolari alla LM, prodotte fino all' incontro con la $F'f'$. Laonde una tal sezione sarà graficamente assegnata (*pr.34.*).

236. Scol. 1. Volendo esibire l' effettiva curva d' intersezione, è facile comprendere, che per ciascun punto i' [*fig.n. 1.*] della sua projezione verticale corrispondendovi un' ordinata uguale alla $I'kh$, che dal punto I' projezione di i' applicasi nella projezione cch di tal curva, si otterrà quell' ordinata, elevando da i' alla $F'f'$ la perpendicolare $i'KH$ uguale alla $I'kh$, e prendendovi le $i'K$, $i'H$ uguali rispettivamente alla $I'k$, $I'h$; saranno K, H punti appartenenti alla curva effettiva di sezione; e similmente per gli altri. La qual costruzione risulta in questo caso più agevole dell' altra generale esibita nella prop. 34.

237. Scol. 2. Che se voglia assegnarsi graficamente la tangente della curva di sezione in un qualunque punto di essa; è chiaro aver quella per projezione orizzontale la tangente la curva di projezione corrispondente in quel punto di essa, ch' è projezione del dato; e la projezione verticale dover cadere nella traccia verticale del piano segante. Adunque una tal tangente rimarrà determinata (*pr. 15.*). E sarà facile trasportarla sulla curva effettiva di sezione, quando non si voglia direttamente tirarla a questa, pel punto assegnato in essa.

PROPOSIZIONE LXXVI.

PROBLEMA.

238. Costruire l' intersezione di una superficie conica data di sito, con un piano di sito, perpendicolare a quello di projezione verticale.

Sieno a, a' le projezioni del vertice A [*fig.77.*] della superficie conica, e pqp la sua traccia orizzontale; e sia $F'f$ la traccia orizzontale del piano segante $f'F'f$, $F'f'$ la verticale, nella quale, pel sito assegnato a tal piano, dovrà cadere la projezione dell' intersezione da costruirsi.

Or si tiri per a una qualunque corda paq nella curva pqp, e projettati i punti p, q in P', Q', congiungansi le $P'a'$, $Q'a'$, che saranno le projezioni verticali de' due lati della superficie conica passanti per p, q; ed i punti r', s' ov' essi incontreranno la $F'f'$ saranno per conseguenza le projezioni de' punti R, S, ove que'lati incontrano la curva di sezione, cioè di due punti R, S di questa: e projettati i punti r', s' in r, s sulla ras, ne saranno essi le rispettive projezioni orizzontali. Nel qual modo determinando gli altri punti di questa projezione, essa verrà ad esibirsi. Quindi si sarà ottenuta la grafica costruzione dell' intersezione proposta.

239. Scol. 1. L' esibizione della curva effettiva di sezione rientra nello scolio 1. del problema precedente, riducendosi ad assegnar quella del proposto piano segante, con la superficie cilindrica verticale, che tiene per direttrice la projezione orizzontale, poc' anzi costruita, di un tal piano con la superficie conica.

240. Scol. 2. La tangente per un punto R della curva di sezione, avendo per projezione orizzontale la tangente la projezione corrispondente di tal curva nel punto ch' è projezione del dato, rimane però esibita. Ed il punto ov'essa in-

contra il piano orizzontale sarà quello ove la sua projezione incontra la F′*f* traccia corrispondente del piano segante

PROPOSIZIONE LXXVII.

TEOREMA.

241. Costruire l' intersezione di una superficie di rivoluzione data di sito, con l' asse verticale, e di un piano dato di sito, perpendicolare al verticale di projezione.

La traccia verticale F′*f*′ [*fig.78.*] del piano di sito incontri la projezione verticale della generatrice della superficie di rivoluzione ne' punti *c*′, *e*′, che dinoteranno gli estremi della projezione verticale *c*′*e*′ della curva di sezione prodotta dal piano segante *f*F′*f*′ nella superficie proposta (*). E l' asse di questa incontri il piano orizzontale in *a*.

Si prenda nella *c*′*e*′ un qualunque punto *i*′, pel quale conducasi la *l*′*g*′*d*′*m*′ parallela alla LM, comune sezione de' piani ortogonali, sarà *d*′*g*′ il raggio di quel cerchio, che corrisponde nella superficie di rivoluzione all' altezza A′*d*′ sul

(*) In una superficie di rivoluzione, che segata da un piano, dà sempre luogo ad una curva rientrante in se medesima, si possono assegnare gli estremi della projezione verticale della curva di sezione, da' quali rimangono ancor fissati quelli corrispondenti dell' orizzontale. Non così però ne' due precedenti problemi, per le superficie cilindrica, e conica, per le quali si potranno anche assegnare sol quando la traccia orizzontale di esse sia una curva rientrante in se medesima. Ed il modo di assegnarli si è di tirare alla loro traccia le tangenti perpendicolari alla comune sezione de' piani di projezione; indi, pe' punti ove queste l' incontrano, assegnare le projezioni verticali de' lati delle superficie corrispondenti a' punti de' contatti nella sua traccia; queste intersegando la traccia verticale del piano di sito vi segneranno gli estremi della projezione verticale da costruirsi.

piano orizzontale, il centro del quale è projettato in a, e la cui projezione orizzontale otterrassi, descrivendo in tal piano col centro a, intervallo $d'g'$ il cerchio ghk. Ed è anche chiaro, che l' ordinata a quel cerchio pel punto i', avrà per sua projezione la $I'kh$, ordinata corrispondente al cerchio khg pel punto I' projezione di i'. Or quell' ordinata dovendo esistere nel piano segante proposto, all' altezza orizzontale $i'I'$, o sia $d'A'$, i punti dov'essa incontra il cerchio, i quali hanno per projezioni gli altri K, h, ove la $I'kh$ incontra il cerchio khg projezione di quello, saranno due punti della curva di sezione da costruirsi. E similmente determinando le projezioni orizzontali di altri punti di tale intersezione, si otterrà la sua projezione orizzontale dalla curva, che passa per tutte le projezioni k, h, determinate nel modo poc' anzi detto. E come che di essa n' era data la projezione verticale; risulterà perciò dato il suo sito, e la configurazione (*pr.34.*)

242. Scol. L' esibizione dell' effettiva curva di sezione, e la tangente a questa in un punto dato, si eseguiranno come negli scolj alla prop. LXXV.

CAPITOLO XIII.

DELLE INTERSEZIONI DELLE SUPERFICIE CURVE.

243. Assegnati i determinanti del sito di due superficie curve (*pr.46.*); se mai esse incontrinsi, dovrà da quelli risultare il sito dalla linea di loro intersezione (*def.2.*), ed i determinati di questa; della qual ricerca ci occuperemo nel presente capitolo.

Or siccome una tal linea d' intersezione dee trovarsi ad un tempo nelle due superficie intersegantisi, però essa, in generale, dee partecipare delle curvature di ciascuna, da che tali linee prendono la denominazione di *curve a doppia curvatura*. Possono però in alcuni casi, per la particolar natura delle superficie curve intersegantisi, o per la loro speciale posizione, i loro incontri essere curve piane, come sono quelli di due sfere; o anche linee rette, come per l' appunto le intersezioni di due superficie cilindriche a lati paralleli, o di due coniche col vertice comune. E può anche avvenire l' incontro di due superficie in un punto, ov' esse tocchinsi a vicenda, come se n' è veduti esempj per le sfere nel cap. X.

PROPOSIZIONE LXXVIII.

PROBLEMA GENERALE.

244. Abbozzare il metodo generale per costruire l'intersezione di due superficie curve date di sito, e di forma, le quali s' intersegano..

Concepiscansi esse superficie segate da una serie di piani,

i quali serbino tutti nello spazio una stessa posizione determinata, cioè sieno tutti paralleli ad un piano di sito, o passino tutti per una retta data di posizione. Scelgansi però tali piani seganti in modo, che le intersezioni di essi con ciascuna delle proposte superficie interseganti sieno facili a conoscersi, ed a costruirsi. Ciò posto, per ognuno di questi piani seganti si determinino i punti, ne' quali s' intersegano le projezioni delle linee curve da essi prodotte, nelle superficie curve proposte, che saranno precisamente le projezioni di que' punti, che in tal piano segante si trovano esser comuni a tali superficie; la curva, o que' rami di curva, che passerà, in ciascun piano di projezione, per tutti que' punti, che col precedente metodo si saranno esibiti su di esso, sarà la projezione corrispondente dell' intersezione da costruirsi.

245. Scol. Il metodo esposto, nel precedente problema generale, applicabile ad ogni quistione ove propongasi a costruire l' intersezione di due superficie curve, ha però bisogno di molta perpicacia di chi lo adopra, per essere vantaggiosamente usato: poichè esigendosi per esso, come si è veduto, a fin di determinare que' punti dell' intersezione di due superficie curve, che ritrovansi in uno stesso piano segante, di costruire le due linee da questo in quelle rispettivamente segnate; sarà tal costruzione tanto più comoda, ed elegante, quanto più facili ad esibirsi sono le projezioni di queste linee, le quali in molti casi, scegliendosi convenevolmente i piani seganti, non sono che rette, e cerchi, e quindi capaci ad essere esibite con un moto facile, e continuo. Bisogna dunque, prima d' imprendere la soluzione di un problema di questo genere, meditar bene sulla genesi delle superficie delle quali si vuol determinare l'intersezione, e sulla scelta de' piani seganti; affinchè il metodo proposto, per costruirne l' intersezione, il quale di sua natura è lungo, e penoso, riesca in pratica della maggior facilità, ed eleganza possibile. E tal-

volta, per riescir meglio nella soluzione di uno di questi problemi, bisognerà rinunziare al sistema de' piani seganti, ed impiegare superficie curve, le cui intersezioni colle proposte sieno più facili a determinarsi, che quelle de' piani; del che se ne vedrà qualche esempio più appresso.

PROPOSIZIONE LXXIX.

PROBLEMA.

246. Tirare la tangente per un punto dato all' intersezione di due superficie curve.

Cas. 1. Se non siesi costruita l' intersezione di tali superficie, basta considerare, ch' esistendo una tal curva nell' una delle superficie proposte, la tangente di essa, in un punto dato, dovrà cadere nel piano, che tocca la superficie in quel punto. E lo stesso dovendo avvenire per l' altra, ne segue, che la tangente cercata debba essere l' intersezione di tali due piani.

Cas. 2. Che se la curva d' intersezione siesi esibita, le projezioni della tangente saranno rispettivamente le tangenti le projezioni ne' punti, che sono le projezioni del dato.

247. Scol. Questo problema generale ci risparmierà una tal ricerca problematica ne' seguenti problemi.

PROPOSIZIONE LXXX.

PROBLEMA.

148. Costruire l'intersezione di due superficie cilindriche date di sito.

Le due curve xgv, zfu [*fib.79.*) rappresentino le trac-

ce di esse superficie su di uno stesso piano di projezione, e le cd, $C'd'$ sieno le projezioni di quella retta alla quale è costantemente parallela la generatrice della superficie cilindrica, che ha per traccia xgv; ab, $A'b'$ quelle dell' altra retta cui è costantemente parallela la generatrice della superficie cilindrica della traccia zfu. Si tiri per questa retta un piano parallelo alla prima (*pr.39.*), e di un tal piano ne sia ac la traccia su quello di projezione ove esistono le curve xgv, zfu; ed a questa ac si tirino, nello stesso piano di projezione, quante si vogliano parallele fk, che interseghino le due tracce xgv, zfu, per ciascuna delle quali si concepisca condotto un piano parallelo a quello, che passava per la ac. È chiaro, che ognun di tali piani intersegherà le due superficie cilindriche proposte in quo' loro lati, che passano pe' rispettivi punti f, h, g, k, ne' quali le due curve xgv, zfu sono segate dalla corrispondente retta fg: ed è anche chiaro, che si apparterranno all' intersezione da costruirsi que' punti ne' quali questi lati s' intersegano, ove ciò avvenga.

Per esibir tali punti d' incontro, si tirino pe' punti f, h le rette fl, hm parallele alla ab; saranno esse le projezioni corrispondenti, sul piano della traccia zfu, di que' lati della superficie cilindrica di questa traccia, che l' incontrano ne' punti f, h: e projettando questi punti in F', H', sull' altro piano di projezione, le parallele $F'l'$, $H'm'$ condotte per F', H' alla $A'b'$, dinoteranno le projezioni corrispondenti de' suddetti lati di tal superficie cilindrica. Similmente, determinando sul piano di projezione ove esiste la xgv le projezioni gi, kn di que' lati della superficie cilindrica di questa traccia, che passano pe' punti g, k, e poi le corrispondenti projezioni $G'i'$, $K'n'$ di essi sull' altro piano di projezione; i punti p, q, r, s ove s' intersegano, su di un piano stesso di projezione, quello delle curve xgv, sfu, le projezioni corrispondenti de' lati dell' una, e dell' altra superficie cilindrica, dinoteranno su questo piano le

projezioni de' punti comuni a que' lati di esse superficie ; e quindi alle medesime , nel piano condotto per la retta fk. E similmente gli altri punti p',q',r',s' ove s' intersegheranno , sull' altro piano di projezione , le corrispondenti projezioni de'suddetti lati , saranno le altre projezioni de' punti stessi.

Laonde se ciò si continui a fare , la curva che si condurrà per tutt' i punti p, q, r, s . . . . . così determinati, sarà nel piano di questi , la projezione dell' intersezione delle due superficie cilindriche date : e l' altra curva , che passa per tutti gli altri punti p',q',r', s' . . . . . dinoterà l' altra projezione dell' intersezione stessa.

449. Scol. Siccome i limiti del sistema di piani seganti le due superficie cilindriche proposte debbono esser que' piani condotti ad esse , i quali sono paralleli al piano di sito, che ha per traccia la ae, e che sono gli ultimi ad intersegare le due superficie cilindriche ; così vedesi, che i limiti del sistema di rette parallele alla ae, che debbono condursi nel piano di projezione delle curve zfu , xgv , per effettuare la soluzione del precedente problema,sieno rappresentati dalle ultime rette parallele alla ae , che incontrano le curve suddette : e quelle potranno essere tangenti l' una curva , e seganti l' altra , o anche tangenti ad esse comuni.

La ricerca di questi limiti nel costruir le intersezioni di due superficie curve , in generale , è essenzialissima a premettersi , per non cadere in operazioni superflue .

Inoltre convien osservare, che la curva che passa pe'punti p, q, r, s... e similmente l' altra per gli altri punti p', q',r',s'... potrà costare di un ramo solo , o pur di due , o anche di più distinti tra loro ; il che dipende dalla diversa posizione , e natura delle superficie intersegantisi.

PROPOSIZIONE LXXXI.

PROBLEMA.

250. Costruire l' intersezione di due superficie coniche date di sito.

Sieno a, a', [*fig. 80.*] le projezioni del vertice di una delle due superficie coniche, ed xgv la sua traccia su di uno de' piani di projezione: sieno poi b, b' le projezioni del vertice dell'altra superficie conica, e zfu la traccia di essa sul piano stesso della precedente.

Si prenda per direttrice de'piani seganti quella retta, che unisce i vertici delle due superficie coniche, e che ha per sue projezioni le ab, $a'b'$; che perciò se determinisi il punto i ove tal retta incontra il piano delle tracce xgv, zfu (*pr.16.*); la traccia su di questo di un qualunque di que'piani seganti potrà dinotarsi con una retta qualunque if tirata per lo punto i in modo,che incontri le due tracce delle superficie coniche proposte; ed i punti f, h, g, k ove queste sono segate dalla if saranno quelli per dove passano que'lati di esse, ch' esistono nel piano segante corrispondente, ed i quali avranno per loro projezioni, sul piano della if, le ga, ka; fb, hb. Laonde i punti p, q, r, s ove le precedenti projezioni di que' lati s' intersegano, saranno le projezioni corrispondenti di quelli altri ne' quali s'incontrano i suddetti lati, o sia de' punti comuni alle due superficie coniche proposte, nel piano da cui si sono fatte segate. Se dunque si continui la stessa costruzione, si verrà a determinare una serie di punti p, q, r, s, pe' quali facendosi passare una curva, sarà questa la projezione dell' intersezione da costruirsi, nel piano della if.

Per aver poi l' altra di tali projezioni, è chiaro, che bisognerà projettare, per ogni retta if, che si è tirata, i punti

f, *h*, *g*, *k*, sull' altro piano di projezione, in F′, H′, G′,K′, congiunte le F′*b*′, H′*b*′; G′*a*′, K′*a*′; saranno queste le altre projezioni corrispondenti di que' lati delle superficie coniche date, che ritrovansi nel piano segante condotto per *i f*. Ed i punti *p*′,*q*′,*r*′,*s*′ ove tali projezioni s' intersegano, saranno le projezioni, su quest' altro piano di projezione, dell' intersezione di que' lati, e quindi de' punti, che in tal piano si trovano esser comuni alle due superficie coniche date. Laonde la curva, che passerà per tutti questi punti così determinati, sarà l'altra projezione cercata della curva d'intersezione da costruirsi.

251. Scol. A questo problema, ed a' seguenti potrà adattarsi, convenevolmente modificandolo, ciò che si è detto nello scolio al precedente.

PROPOSIZIONE LXXXII.

PROBLEMA.

252. Costruire l' intersezione di una superficie conica dato di sito, con una superficie cilindrica similmente data.

Prendasi l' un piano di projezione perpendicolare alla generatrice della superficie cilindrica, e sieno *acb* [*fig. 84.*] la traccia di questa superficie su tal piano, *degf* quella della superficie conica, ed *h*, *h*′ le projezioni del suo vertice.

Si concepisca passare per l' altezza di tal vertice sul piano delle tracce *acb*, *degf* un sistema di piani seganti, la traccia dell' un de' quali sul piano stesso di projezione sia la retta *heg*; il punto *c* ove questa retta intersega la traccia *acb* di essa, sarà la projezione di quel lato della superficie suddetta, che si trova in tal piano segante, ed incontra la traccia *acb* in *c*: ed abbassando da *c* sulla LM la perpendico-

lare indefinita $cC'c'$, sarà $C'c'$ la corrispondente projezione di quel lato sull'altro piano di projezione. Inoltre si projetti il punto g, ove la stessa retta hcg intersega la traccia della superficie conica, in G' sull'altro piano di projezione, e congiungasi la $G'h'$; saranno le hg, $h'G'$ le corrispondenti projezioni del lato della superficie conica, ch'è nello stesso piano segante, ed il quale incontra la traccia in g. Laonde il punto p', ove intersegansi le $C'c'$, $G'h'$, sarà la projezione del punto d'intersezione di que' lati dellè due superficie curve proposte, i quali trovansi nello stesso piano segante condotto per la hg. E determinando similmente altri di questi punti p'; la curva condotta per essi disegnerà una delle projezioni dell'intersezione cercata, e quindi questa si sarà costruita, mentre l'altra projezione di essa, per la maniera come si è stabilito il piano di projezione delle tracce acb, $dcgf$, cade nella stessa traccia acb della superficie cilindrica; e non resta al più, che limitarne il corso quando ciò abbia luogo.

PROPOSIZIONE LXXXIII.

PROBLEMA.

253. Costruire l'intersezione di una superficie cilindrica data di sito con un'altra di rivoluzione intorno ad un asse verticale, anche data di sito.

Sieno gh, $g'h'$ [*fig.* 82.] le projezioni di quella retta cui è parallela la generatrice della data superficie cilindrica, ed abc dinoti la traccia di essa su quello de' piani di projezione cui è perpendicolare in d l'asse della data superficie di rivoluzione. Sia inoltre $c'd'f'$ la projezione della generatrice di quest' altra superficie sopra un piano perpendicolare al primo, e la projezione del suo asse su questo stesso piano sia la $D'd'$ perpendicolare alla LM.

Ciò posto, si tiri nella curva $e'd'f'$ l' ordinata $m'l'$ all' asse $D'd'$, per la quale suppongasi condotto un piano orizzontale; un tal piano segnerà nella superficie di rivoluzione un cerchio del raggio $m'n'$, che avrà per projezione orizzontale il cerchio psr descritto col centro d, e col raggio $m'n'$. Inoltre col cateto $n'D'$, e con l' angolo opposto ad esso, uguale a quello in cui inclinasi al piano orizzontale la generatrice della superficie cilindrica (91), si descriva il triangolo $n'D'X'$, e tagliata la bg uguale alla $D'X'$, si descriva per g la curva gpq identica all' altra abc (219); sarà questa la projezione della comune sezione del piano orizzontale condotto per la $m'l'$ con la superficie cilindrica; e perciò i punti p, q, ov' essa intersega il cerchio psr, saranno le corrispondenti projezioni orizzontali di que' punti comuni alle due intersezioni prodotte da quel piano segante nelle superficie curve proposte, cioè di que' punti, che sono ad esse comuni in tal piano. E projettandosi questi punti p,q in p', q' sulla $m'l'$ nell' altro piano di projezione, si avranno le corrispondenti projezioni verticali de' punti suddetti delle superficie proposte. Laonde, continuandosi la stessa costruzione, si verrà in tal modo ad assegnare una serie di punti p, q sul piano orizzontale, ed un' altra corrispondente p', q' sul verticale; e facendo passare una curva pe' primi di essi, ed un' altra pe' secondi, saranno queste le rispettive projezioni dell' intersezione cercata.

**

PROPOSIZIONE LXXXIV.

PROBLEMA.

254. Costruire l' intersezione di una superficie cilindrica, e di un' altra sferica, date di sito.

Questo problema non è che un semplice caso del precedente, nella cui soluzione rimane compresa la sua; che può però, per la specialità di natura della superficie sferica, costruirsi graficamente, in modo più facile, prendendo la generatrice della superficie cilindrica perpendicolare al piano di projezione orizzontale. Poichè, in tal caso, la projezione orizzontale della comune sezione di ciascun piano segante con la superficie cilindrica, sarebbe la stessa traccia di questa; e tal traccia rappresentando ancora la projezione orizzontale dell' intersezione da costruirsi, di questa projezione non sarebbe stato bisogno, che di fissarne solamenti i limiti, la qual cosa facilmente si vede come debbasi eseguire. Laonde la presente ricerca si ridurrebbe a determinare la sola projezione verticale, la quale otterrebbesi come nel problema precedente (*).

ALITER.

255. Rappresenti *chke* [*fig. 83.*] la traccia orizzontale della superficie cilindrica verticale, che sarà ancor quella dell' intersezione da costruirsi, ed *a*, *a'* sieno le projezioni rispettive del centro della sfera data, di cui ne sia il cerchio *bfc* la projezione orizzontale, cioè quella del suo cerchio ge-

(*) La stessa costruzione avrebbe anche luogo per una qualunque superficie di rivoluzione, nel caso, che la generatrice della superficie cilindrica fosse ancor essa verticale.

neratore nel piano parallello all' orizzontale, che passa pel suo centro A.

Si tiri nel piano orizzontale una qualunque rotta *lm* parallela alla LM, che incontri ad un tempo le due curve *chkc*, *bfg*, della quale è facile conoscerne i limiti; o per essa si concepisca condotto il piano parallelo al verticale di projezione, che dovrà incontrare la superficie cilindrica ne' due suoi lati, che passano pe' punti *h*, *k*, in dove la *lm* intersega la sua traccia, e la sfera nel cerchio del raggio *dg*, orizzontalmente projettato nella *lm*, e verticalmente nell' identico cerchio *h' k' k' h'*, col centro *a'*; sul quale projettando i punti *h*, *k*, saranno i punti *h'*, *h'*; *k'*, *k'*, le projezioni verticali di altrettanti punti esistenti nel proposto piano segante, e comuni alle due superficie date, cioè dell' intersezione da costruirsi. Nel qual modo determinando le projezioni verticali degli altri punti di tal intersezione; la curva, o le curve condotte per essi rappresenteranno la projezione verticale dell'intersezione da costruirsi.

256. Scol. Per mezzo del precedente problema può graficamente costruirsi l' elegantissima soluzione del Viviani al suo enigma geometrico della volta emisferica quadrabile, che enuncieremo nel seguente modo goometrico: *Segnare nella superficie di un emisfero due curve identiche, e tali, che la rimanente superficie di esso risulti assolutamente quadrabile*. Il quale da lui vedesi ridotto a *perforare l' emisfero con un cilindro retto, che abbia per direttrice del suo lato quel cerchio, il cui diametro è il raggio dell' emisfero, ch' è perpendicolare al cerchio che n'è base, nel centro di esso.*

PROPOSIZIONE LXXXV.

PROBLEMA.

257. Costruire l' intersezione di una superficie di rivoluzione data di sito, intorno ad un asse verticale, con una superficie conica anche data di sito.

Il punto d [*fig.84.*] sia la projezione orizzontale dell' asse della superficie di rivoluzione data, la retta $D'd$ perpendicolare alla LM sia la corrispondente projezione verticale dello stesso, e la curva $g'd'f'$ sia la projezione verticale della generatrice della proposta superficie di rivoluzione, allorchè, nel suo rivolgimento intorno all' asse, trovasi in un piano parallelo a quello di tal projezione; l' altra curva abc poi dinoti la traccia della data superficie conica, il cui vertice sia projettato in c, c'.

Si tiri, nel piano verticale, una qualunque retta $l'm'$ parallela alla LM, che prendasi per la traccia di un piano orizzontale, il quale interseghi le due proposte superficie; sarà un cerchio la comune sezione di esso col solido di rivoluzione, ed avrà per raggio la semiordinata $n'm'$ nella curva $g'd'f'$, e per projezione orizzontale l' altro cerchio qps, descritto col raggio suddetto, e col centro d. Or lo stesso piano segante segnerà nella superficie conica una curva simile alla traccia abc di questa (225), e che avrà per projezione una curva identica ad essa, la quale si otterrà come nello scolio al num.227: sia questa la curva pkq. È chiaro, che i punti p, q, ove la curva pkq intersega il cerchio pqs, sieno le projezioni orizzontali corrispondenti di que' punti ne' quali s' intersegano nello spazio la comune sezione del piano segante condotto per la $l'm'$, con le due superficie date, o sia que' punti comuni a queste, i quali esistono in un tal piano; e p', q' ne dinoteranno le corrispondenti projezioni verticali.

E determinando in simil modo una serie di punti, come p, q, sul piano orizzontale, ed altrettanti come p', q' sul verticale di projezione; la curva, o i rami di curva, che passerà pe' primi, sarà la projezione orizzontale dell' intersezione da costruirsi, e l' altra condotta pe' secondi ne sarà la corrispondente projezione verticale; che perciò rimarrà risoluto il presente problèma.

PROPOSIZIONE LXXXVI.

TEOREMA.

258. Costruire l'intersezione di una superficie cònica data di sito con quella di una sfera similmente data.

Cas. 1. Primieramente il vertice A del cono sia centro della sfera, e ne sieno a, a' [*fig.85.*] le projezioni; nqd dinoti la traccia orizzontale data della superficie conica, $a'm'$ il raggio della sfera, e 'l cerchio $l'f'g'm'$ la projezione verticale di essa. Ciò premesso, si concepisca passare per l' altezza orizzontale A a del punto A una serie di piani, che saranno tutti verticali, e ciascuno di loro interseghèrà la superficie conica in un sistema di rette, projettate orizzontalmente nella traccia orizzontale del corrispondente piano segante, e la superficie della sfera in un cerchio massimo; ed i punti ne' quali s' incontreranno, per ciascun piano, quelle rette, e questo cerchio, si apparterranno all' intersezione da costruirsi.

Rappresenti la retta nad la traccia orizzontale di uno di questi piani; dovranno le generatrici nelle quali esso incontra la superficie conica passare per n, d, ed esser projettate sulla nd: ed abbassando da que' punti sulla LM le perpendicolari nN$'$, dD$'$, congiunte le N$'a'$, D$'a'$, dino

teranno queste le rispettive projezioni verticali di quelle stesse generatrici.

Per costruire que' punti in dove tali rette incontrano la circonferenza del cerchio segnato nella sfera dal piano stesso; si tiri per a la retta fag parallela alla LM, e poi s'intenda il proposto piano segante rivolgersi intorno alla A a, finchè la nd coincida con la fg; è chiaro, che in tal movimento non si varierà l'altezza orizzontale di essi punti d'intersezione; che i punti n, d descrivendo gli archi circolari dg, nf verranno ad applicarsi in g, f sulla fg; e che projettando questi in G′, F′, le G′a′, F′a′ dinotino le projezioni verticali delle generatrici della superficie conica, che passavano per d, n, nel nuovo sito che ha preso il piano segante che le contiene. Inoltre i punti g', f', ov'esse intersegheranno rispettivamente la circonferenza $l'f'g'm'$, che è la projezione verticale dell' intersezione di esso piano colla superficie della sfera, considerata anche nella posizione, che ha presa in virtù del movimento del piano, saranno le projezioni verticali de' punti dell' intersezione dimandata, considerati anche nella nuova posizione di un tal piano. Il perchè le projezioni di essi punti nel vero loro sito dovranno esistere nelle parallele $g'h'$, $f'k'$ alla LM, tirate pe' punti g', f'; ed esser perciò i punti h', k', ove queste rette incontrano rispettivamente le D′a′, N′a′, che doveano pur contenerle: e se projettinsi i punti h', k' sulla nd in h, k; saranno questi le corrispondenti projezioni orizzontali degli stessi punti d'intersezione. Laonde facendo passare una curva per tutt' i punti h', k' determinati nel modo stesso, ed un' altra per tutt' i punti h, k; saranno queste le rispettive projezioni dell' intersezione da costruirsi.

Cas. 2. Che se le due superficie proposte non sieno concentriche: si prenda per direttrice de' piani seganti la retta che unisce il centro della sfera col vertice del cono, e stabiliscasi il piano di projezione verticale parallelo a questa; sa-

ranno pure linee rette le intersezioni di ciascun piano segante con la superficie conica, e cerchi massimi quelle che han luogo colla sfera; e tutta la soluzione si condurrà come nel caso precedente.

PROPOSIZIONE LXXXVII.

PROBLEMA.

259. Costruire l' intersezione di due superficie di rivoluzione.

Sol. Cas. 1. Abbiano primieramente tali superficie i loro assi in un piano stesso, e suppongasi un di questi perpendicolare al piano orizzontale, e 'l piano verticale parallelo a quello, che vien determinato dagli assi stessi.

Ciò posto, sia a [*fig.86.*] la projezione orizzontale dell'asse verticale, $A'a'$ la projezione verticale dello stesso, $c'd'e'$ la curva generatrice della superficie corrispondente, rappresentata nel piano verticale; e sia ab la projezione orizzontale dell'altro asse, $B'a'$ la verticale, ed $f'd'h'$ la generatrice di una tal superficie rappresentata anche nel piano verticale: è chiaro, che saranno a, a' le projezioni di quel punto nel quale incontransi i due assi.

Concepiscasi adesso una superficie sferica avente per centro un tal punto, intersegare le due superficie date; sarà projezione verticale di essa il cerchio $i'n'o'p'$, descritto col centro a', e col raggio della sfera; ed una tal superficie avendo l' asse di comune con ciascuna delle date, intersegherà, com' è chiaro, ognuna di queste in un cerchio, perpendicolare all'asse della stessa. Che perciò, la projezione verticale dell' intersezione della sfera con la prima di tali superficie sarà la retta $n'o'$, perpendicolare alla $A'a'$, e l'orizzontale sarà il cerchio nor descritto col centro a, e col diametro $n'o'$,

e l' intersezione della stessa superficie sferica con l'altra delle date avrà parimento, per sua projezione verticale la retta $k'p'$ perpendicolare alla $a'B'$; e 'l punto r' nel quale s'intersegano le $n'o'$, $k'p'$ sarà la projezione verticale di que' due punti, ne' quali si tagliano le circonferenze de' due cerchi, projettate verticalmente in $n'o'$, $k'p'$, cioè di due punti dell' intersezione da costruirsi. Se dunque per tutt' i punti r' così determinati si conduca la curva; sarà questa la projezione verticale di essa intersezione.

Projettando ciascun punto r' sulla circonferenza del cerchio corrispondente nro in r, r; saranno questi le projezioni orizzontali de' due punti d' incontro delle circonferenze de' cerchi suddetti, i quali si trovano sulla stessa sfera; e la curva condotta per tutti questi punti r', similmente determinati, sarà la projezione orizzontale dell'intersezione stessa.

Cas. 2. Che se gli assi delle due superficie date non sieno nello stesso piano, e si continui a supporre l' un di essi perpendicolare in a al piano orizzontale, e 'l piano verticale parallelo ad entrambi; dovrà la projezione orizzontale dell'altro asse esser parallela alla LM [*fig.87.*]. Dinotino finalmente le $A'a'$, $B'b'$ le projezioni verticali rispettive di tali assi, e le curve $a'c'd'$, $d'b'g'$, segnate nel piano di projezione verticale, sieno le projezioni rispettive delle generatrici corrispondenti delle due superficie di rivoluzione, nel sito parallelo a quel piano.

Ciò posto, si tirino nel piano verticale le rette $F'f'$. . . . tutte perpendicolari alla $B'b'$; e per queste si suppongano passar piani normali a quello: ciascun di questi piani segnerà nella superficie di rivoluzione, che ha l' asse verticale, una curva della quale potrà determinarsi la projezione orizzontale rct (241); ed incontrerà l' altra superficie data, al cui asse è perpendicolare, in un cerchio, che avrà per sua projezione l' ellisse rtg (223): ed i punti r, t, ne' quali queste due curve s' incontrano, saranno le projezio-

ni orizzontali di altrettanti punti dell' intersezione da costruirsi, ch' esistono in uno stesso piano segante $f F' f'$. Se dunque per tutti questi punti r, t similmente determinati si faccia passare la curva corrispondente; questa rappresenterà la projezione orizzontale di quell' intersezione.

Projettando i punti r, t in r', t', sulle rispettive tracce verticali $F' f'$ di quel piano segante, nel quale contengonsi i punti d' intersezione de' quali essi r, t ne sono le projezioni orizzontali; e poi tirando per tutti questi altri punti r', t', in tal modo determinati, la curva, si otterrà la projezione verticale dell' intersezione stessa.

260. Scol. Se nel caso 2. del precedente problema, la superficie con l' asse verticale fosse di second' ordine; le sezioni prodottevi da' piani seganti sarebbero ancor esse ellissi; e le loro corrispondenti projezioni orizzontali in altre ellissi si otterrebbero facilmente.

CAPITOLO XIV.

DE' DETERMINANTI DEL SITO DELLE LINEE CURVE A DOPPIA CURVATURA; E DI ALCUN PROBLEMA FONDAMENTALE PER LA LORO TEORICA.

261. Si è già veduto, che il sito di una linea curva nel piano, del pari che quello di ciascun punto di essa, determinasi riferendolo a due assi, o direttrici assegnate nel piano stesso (*pr.8.*): e la sua natura rimane ancor definita dal rapporto delle coordinate a quegli assi geometricamente espresso, o per la corrispondente equazione, che il rappresenta, che dicesi *alla curva* (*pr. 8*, *e pr. 32. Invenz. geom.*), dalla quale le proprietà indeterminate di essa possonsi convenevolmente rilevare, come per le curve coniche ampio argomento ne presentano gli ordinarj trattati per esse (*).

Seguendo lo stesso andamento, il sito, e la natura di una linea curva a doppia curvatura non potrà esibirsi, che rapportandone i punti a tre assi coordinati, o sia a tre piani di sito, o in altro modo analogo a quello di fissare il sito di un punto nello spazio (*pr.11,12,13*); di che ancora si è veduto precedentemente un esempio per una curva piana nello spazio (*pr.34.*).

Or sebbene quest' argomento, nello stato attuale delle Matematiche più facile, ed uniforme risulti, e più possa estendersi trattandolo con la moderna analisi, pure è necessario, che alcune geometriche considerazioni vi si premettano, delle quali ci occuperemo brevemente in questo capitoletto; e che non lasceremo senza usarne in appresso.

Si è già veduto, che il sito di una linea curva a doppia

(*) *Veggasi il trattato analitico del* Fergola *su tali curve*.

curvatura, risultante dall' intersezione di due superficie curve, rimaneva determinato da queste (cap. XIII.), nè più oltre converrebbe procedere per tale oggetto, se esse indipendentemente da quelle non potessero ancora ottenersi. Ma siccome nel caso di due superficie definite, e dotate di una proprietà caratteristica, esse intersegandosi, ciascuna comunica alla linea del loro incontro questa tal proprietà, sicchè una tal linea da quelle si riman definita, e ne divien nota la natura, per la quale può essere convenevolmente espressa, e descritta; così conviene, che da questa partendosi a fissarne il sito si pervenga. E siffatta più special considerazione si rende tanto più importante, quanto che, essendo le linee curve a doppia curvatura la riduzione della indeterminazione delle superficie curve per un grado, i problemi, che per la loro composizione a queste riduconsi, vengono per mezzo di quelle più elegantemente risoluti. Delle quali cose se ne vedranno esempj in appresso, non limitando per esse quì la nostra trattazione, come abbiamo indicato, che alle principali ricerche geometriche di sito per tali linee curve (*); serbando le altre all' altro trattato analogo della *Geometria analitica di sito*, potendosi per ora, coloro che amano istruirsene, ottenerlo con buon successo dal cap. V del vol. I del dotto, ed importante *Trattato del Calcolo differenziale, ed integrale*, del *Lacroix*, ove vedesi raccolto, e con ordine, e chiarezza esposto tutto quello, che in questo argomento era stato già preparato da Clairaut, proseguito, e perfezionato dall' Eulero, e dal Monge finalmente di molto esteso, e sviluppato.

(*) Veggasi il cap. seguente, e quelli della *Parte II.* sulla *Spirale cilindrica*, e l' *Epicicloide sferica*.

PROPOSIZIONE LXXXVIII.

TEOREMA.

262. I determinanti del sito, e della forma di una curva a doppia curvatura, sono le projezione di essa su due piani ad angolo.

Imperocchè essendone data una sola projezione, è ancor data quella superficie cilindrica, che ha per direttrice tal projezione, e per retta generatrice la perpendicolare al piano in cui quella esiste. Similmente è data la posizione dell' altra superficie cilindrica, che ha per traccia l' altra projezione della curva proposta nello spazio, e per generatrice una retta perpendicolare al piano di quest' altra projezione. Laonde tal linea curva non potrà essere, che quella sola in cui queste due superficie cilindriche s'intersegano, e perciò sarà data di sito (248).

E siccome di ogni punto della linea curva proposta nello spazio se ne hanno le due projezioni, si ha quindi l' altezza di esso su di uno de' piani di projezione (42), e per conseguenza il lato corrispondente nella superficie cilindrica retta a tal piano. Laonde si potrà in questa superficie cilindrica segnare un tal punto. E così facendo per ogni altro, si verrebbe a disegnare su di questa l' effettiva linea curva data per mezzo delle sue projezioni, che perciò si sarà esibita la sua forma.

263. Cor. Quindi i determinanti di una linea curva a doppia curvatura nello spazio saranno quelle due superficie cilindriche rette a due piani, che s' incontrano, che avranno rispettivamente per direttrici le projezioni su di essi di quella linea curva.

PROPOSIZIONE LXXXIX.

PROBLEMA.

264. Date le projezioni di una curva, ch' è nello spazio; determinare s' essa sia a semplice, o pure a doppia curvatura.

Sieno *abcd*, *a'b'c'd'* [*fig. 88.*] le projezioni della curva proposta; e primieramente se una di esse, la *abcd* per esempio, fosse una retta, una tal curva nello spazio, non potrebbe essere, che a semplice curvatura; poichè essa in tal caso dovrebbe risultare dall' intersezione della superficie cilindrica normale al piano della projezione *a'b'c'd'*, che avrebbe questa curva per traccia, e del piano verticale a quello della projezione *abcd*, e che ha per sua traccia su di questo la retta data. Adunque una tal curva dovrà esistere in questo piano, e perciò essere a semplice curvatura.

Suppongasi dunque, che ambedue le projezione *abcd*, *a'b'c'd'* sieno linee curve. Si prendano in una di esse *abcd*, ad arbitrio, i quattro punti *a*,*b*,*c*,*d*, i quali si projettino sull' altra curva in *a'*,*b'*,*c'*,*d'*; saranno quelli, e questi le corrispondenti projezioni di quattro punti nello spazio esistenti nella linea curva proposta. Or si determini il piano, che passa per tre di tali punti ad arbitrio, e la retta che congiugne un di essi stessi col quarto: se tal retta incontrerà i piani delle projezioni *abcd*, *a'b'c'd'* nelle tracce di un tal piano (e ciò è sufficiente sperimentarlo per una sola di queste tracce), sarà chiaro ch' essa esiste in questo; e quindi che quel quarto punto trovavasi co' primi tre in un piano stesso, dal che ne segue, che la curva proposta abbia tutt' i suoi punti in un piano, e perciò, che sia a semplice curvatura. Ma se poi ciò non avviene, la curva proposta sarà a doppia curvatura.

265. Cor. Si rileva da quello, che in principio di questo

problema sta detto, che una curva a doppia curvatura non possa mai avere per una delle sue projezioni una retta.

PROPOSIZIONE XC.

TEOREMA.

266. La tangente una linea curva nello spazio, in un punto di essa, ha per projezioni le tangenti le projezioni di tal curva in que' punti, che sono le projezioni del proposto.

Questa proposizione non è che la conversione in teorema del caso 2. del problema al *n*. 246. E la verità di essa rilevandosi immediatamente da principj già noti, non ha bisogno di esser dimostrata.

CAPITOLO XV.

DI ALCUNI PROBLEMI NELLO SPAZIO RISOLUTI PER MEZZO DE' LUOGHI ALLA SUPERFICIE.

267. Del pari che la proprietà costante, ed indeterminata di una linea nel piano, costituisce di essa un luogo geometrico atto a risolvere, e costruire, con la combinazione di un altro que' problemi nella cui analisi perviensi a tal proprietà; così pure, pe' problemi nello spazio, la proprietà costante, ed indeterminata di cui sia dotata una superficie, ne costituisce il luogo geometrico di que' problemi nello spazio, che nella loro analisi geometrica conducono a quella proprietà. Se non che la loro indeterminazione essendo per due gradi, mentre dall' intersegarsi le superficie risultano in generale linee, e non punti, qual si richieggono per l' assoluta determinazione del quesito, conviene, che di que' luoghi se ne combinino tre, per pervenire alla risoluzione del problema determinato, scisso in indeterminati, per mezzo de' quali si cerca costruirlo. Poichè in tal modo, dalla combinazione dell' un di essi con ciascuno degli altri due risultando due linee, e queste dovendo incontrarsi in punti, si perverrà ad ottener quelli soddisfacenti al problema proposto, e quindi la sua compiuta soluzione. Vale a dire, per usare, in questo argomento, il linguaggio degli antichi geometri, che di tali luoghi ebbero più scienza che noi, vi bisognano tre luoghi *anastrofici* per la costruzione di un problema determinato nello spazio; se però i punti soddisfacentivi non appartenessero già ad un luogo *diessodico*, nel qual caso vi è sufficiente un solo di que' primi luoghi. E dal precedente ragionamento rilevasi ancora, che tre superficie curve scambievolmente intersegantisi non abbiano, che soli punti di comune.

Adunque si vede, che la dottrina delle intersezioni delle superficie curve, non sia solamente un mezzo pratico da adoperarsi per le costruzioni grafiche di esso nelle arti del disegno; ma possa ancora servire a risolvere geometricamente problemi nello spazio.

È facile anche comprendere, dal fin qui detto, che le linee curve a doppia curvatura non sieno già esse i luoghi alla superficie, bensì nuovi luoghi ridotti da quelli, limitando la proprietà loro caratteristica indeterminata a due condizioni combinate di un problema; da che tutt' i punti di due superficie, che n' eran di esso le locali *anastrofiche* rispettive, riduconsi a que' soli della linea curva di loro intersezione, che ne diviene però un luogo *diessodico* del problema.

Or sebbene non mancasse, nelle precedenti ricerche talun esempio dell' uso vantaggioso di que' luoghi nella soluzione di problemi nello spazio; pur tuttavia, a più manifestamente mostrarlo, se ne vedranno quì appresso recati alcuni, che non pur mostrano la speciale applicazione di precedenti costruzioni, ma sono ancora atti a compiere alcuna dottrina elementare per l' innanzi esposta.

Ed è questa ancora l'occasione propria da rilevare di quanta utilità riesca la conoscenza, ed il coltivamento dell' analisi degli antichi; poichè i problemi, che verranno trattati, e gli altri della stessa loro natura, con assai maggior difficoltà prestansi all' Analisi algebrica, co'mezzi, che finora possiede, o a dirittura per la loro risoluzione, o per una convenevole composizione, o per la loro determinazione; come in qualche uno di quelli, che verranno recati si farà osservare.

PROPOSIZIONE XCI.

PROBLEMA.

268. Date di sito due linee rette; esibire quel punto nell' una di esse, che disti dall' altra per una retta data, *cioè*, dal quale abbassata sull' altra la perpendicolare, questa sia quanto una retta data.

La retta su cui dee cader la perpendicolare stabiliscasi normale ad un piano di sito, che prendasi per orizzontale, e sia a [*fig.89.*] il punto ove l' incontri, cioè la projezione orizzontale di essa, ed $A'a'$ perpendicolare ad LM ne sia la projezione verticale: sien poi de, $d'e'$ le projezioni rispettive dell' altra retta di sito.

Or col centro a, e col raggio ar quanto la distanza data R descrivasi, nel piano orizzontale, il cerchio prq, che rappresenti la traccia di una superficie cilindrica verticale, la quale abbia per asse la retta delle projezioni a, $A'a'$, e che sarà il luogo geometrico di tutt' i punti dello spazio, distanti da quella per la data retta R. E però i due punti ne' quali verrà tal superficie incontrata dall' altra retta di sito saranno i richiesti nel problema.

Ed è chiaro, per la determinazione, che un tale incontro avrà luogo, se la circonferenza prq interseghi la projezione orizzonale de della retta data: ed i punti d' intersezione p,q projettati nel piano verticale, sull' altra retta $d'e'$, in p', q', daranno le projezioni verticali corrispondenti di que' punti della retta di sito BC, da' quali abbassate sull' altra le perpendicolari, risultino ciascuna uguale ad R.

PROPOSIZIONE XCII.

PROBLEMA.

269. Date di sito due rette, nell' una delle quali un punto; inclinare a questa dall' altra una retta che vi comprenda in quel punto un angolo dato.

La retta di sito nella quale è dato il punto A stabiliscasi perpendicolare in *a* (*fig.90*) ad un piano di sito, che prendasi per orizzontale, e sia *a'* la projezione verticale corrispondente al punto dato A, e però *a'*A' l' altezza orizzontale di tal punto. Sien poi *bc*, *b'c'* le projezioni orizzontale, e verticale dell' altra retta di sito; e *K* l' angolo in cui dee inclinarsi la congiungente un punto di questa col punto A dell'altra.

Ciò posto, costituiscasi al punto *a'* della *a'*A' l' angolo A'*a'*R' uguale al dato *K*; e poi col centro *a*, intervallo *ar* uguale ad A'R' descrivasi il cerchio *prq*; è evidente, che la superficie conica, la quale avrà questo per traccia orizzontale, e per vertice il punto A sia il luogo di tutte le rette, che inclinansi alla *a*A nell' angolo *K*; e però saranno soddisfacenti al problema que' lati di essa, che passano per que' punti in dove la retta delle projezioni *bc*, *b'c'*, incontra una tal superficie conica. Ed a questo problema (*pr.73.*) sarà però ridotto il proposto, e la sua determinazione.

PROPOSIZIONE XCIII.

270. Data nello spazio una retta indefinita di sito, e dati fuori di essa, due punti; ritrovare nella medesima quel punto, che congiunto co' dati:

I. Sia data la somma, o la differenza de' quadrati delle congiungenti.

II. *O pure*: la somma, o la differenza di esse.

III..... : l' angolo, che vi comprendono.

IV..... : la ragione loro.

Pel num.° I.

271. Cas. 1. La somma de' quadrati delle congiungenti i punti dati col richiesto essendo doppia di quella de' quadrati della metà della retta, che unisce i punti dati, e dell'altra, che dal punto medio di questa va al richiesto (*pr. A. El. II*); sarà dato il quadrato di questa congiungente; e per conseguenza una tal retta (*), che sarà raggio della superficie sferica luogo del punto cercato. E questo verrà per conseguenza determinato dall' incontro della retta di sito con tale superficie sferica (*pr. 74.***); e però due punti soddisferano al problema.

272. Cas. 2. La differenza de' quadrati della congiungente i punti dati col cercato, essendo quanto quella de' quadrate de' segmenti, ne' quali la retta tra que' punti dati rimane divisa dalla perpendicolare tiratagli dal punto cercato; sarà

(*) Sia il triangolo ACB (*fig. 91*) in cui è data la base AB, e la somma de' quadrati de' lati AC, BC; e divisa per metà in O la base AB, pongasi quella somma di quadrati uguale a $2AO \times P$. Ed essendo $AC^2 + CB^2 = 2AO^2 + 2OC^2$; sarà $2AO^2 + 2OC^2 = 2AO \times P$, ed $OC^2 = AO \times (P - AO)$: e però la OC media proporzionale tra le AB, P.

(**) In questo caso della superficie sferica, la costruzione della proposizione citata, rendesi oltremodo facile, ed elementare.

però dato un tal punto in quella retta (*) .. Ed il punto cercato avrà per suo luogo geometrico il piano, che per quel punto determinato nella congiugnente i dati, le si tira perpendicolarmente; il cui incontro con la retta di sito determinerà il punto richiesto (*pr.30.*): che sarà il solo soddisfacente al quesito.

PEL NUM.° II.

273. CAS. 1. Essendo data la somma delle congingnenti i punti dati col richiesto; è chiaro, che questo abbia per luogo geometrico la superficie della sferoide generata dall' ellisse, il cui asse maggiore è la somma data, e l' eccentricità la distanza de' punti dati; che potrà descriversi in un piano di sito qualunque condotto per que' punti (*pr.8.Sez.Con. geom.lib.IV.*). E gl' incontri di tal superficie con la retta di sito (*pr.74.***) saranno i due punti soddisfacenti al quesito.

274.CAS.2. Che se fosse data la differenza delle congiungenti; si vedrà soddisfare al quesito ciascuno de' due punti in cui la retta di sito incontra la superficie del conoide iperbolico, generata dall' iperbole, che tieno per asse principale la data differenza, e per eccentricità la distanza de' punti dati (***).

(*)Nel triangolo ACB(*fig.91* .)essendo data la AB,ed $AC^2 - CB^2 = P^2$, sarà anche $P^2 = AD^2 - DB^2 = (AD + DB)(AD - DB)$. Adunque la differenza tra i segmenti AD, DB si otterrà per terza proporzionale in ordine ad AB, e P; e da essa risulterà assegnato il punto D; che richiedevasi per la costruzione del problema di qui sopra.

(**) La costruzione del problema citato, in questo caso, si ottiene anche in modo semplice, ed elegante.

(***) Per tal superficie bisogna intendere quella che vien generata dalle due iperboli opposte. E la costruzione per gl' incontri con la retta vi diviene analoga a quella del caso 1.

Pel num.° III.

275. Essendo dato l' angolo delle congiungenti ; il luogo del suo vertice sarà la superficie generata intorno alla retta tra' punti dati, dal rivolgimento del segmento di cerchio descritto su questa , capace dell' angolo dato (*33. El. III.*). E però gl' incontri di tal superficie di rivoluzione , con la data retta d sito (*pr. 74.**) saranno i punti soddisfacenti al problema.

Pel num.° IV.

276. Poichè è data la ragione de' due lati del triangolo , che costituiscesi dalle congiungenti da assegnarsi, e n' è pur data la base ; è noto doversi il vertice di tal triangolo allegare, se la ragione data è di eguaglianza , nella retta di sito perpendicolare a quella tra'punti dati, nel punto medio di essa ; se d' ineguaglianza, in un determinato semicerchio (**). E nel primo caso il luogo geometrico del punto cercato nel presente problema sarà il piano perpendicolare alla retta tra' punti dati, nel punto medio di essa ; e l' incontro di tal piano con la retta di sito (*pr. 30.*) sarà quel punto , che dimandasi . Nell' altro caso il sarà la superficie sferica generata

---

(*) La costruzione in questo caso vi si rende pari a quella del n. I. caso 1.

(**) Sia ACB [*fig.92.*] quel triangolo in cui è data la base AB , e la ragion de' lati AC, CB ; è in primo luogo evidente , che se tal ragione sia di eguaglianza il vertice del triangolo debba allogarsi nella perpendicolare indefinita , che si eleva alla AB , dal suo punto medio .

Che se quella ragione sia di maggiore a minore , prolungato il lato AC in E, si dividan per metà gli angoli ACB , BCE per le CD , CD' ; è chiaro , che l' angolo DCD' risulti retto , e però il punto C dovrà esistere nella circonferenza del semicerchio descritto sulla DD' . Or essendo AC : CB :: AD : DB :: AD' : D'B (*3. ed A El. VI.*) ; sarà dato ciascun de' punti D , D', e quindi di grandezza la DD' , di cui è dato anche il sito , come l'era dato della AB ; e però quella risulterà data di sito , e di grandezza .

dal rivolgersi quel semicerchio intorno al diametro, che coincide con la retta indefinita tra' punti dati, al quale sarà però soddisfacento ciascun de' due punti in dove questa è incontrata dalla retta data di sito (*pr.74.* *).

PROPOSIZIONE XCIV.

PROBLEMA.

277. Circoscrivere la sfera ad una data piramide triangolare.

Sieno A, B, C, D [*fig.93.*] i vertici degli angoli della data piramide; è chiaro, che il centro della sfera cercata dovendo essere equidistante da' punti A, B, dovrà essere allogato nel piano perpendicolare alla AB nel punto medio di essa. Similmente, per esser tal centro equidistante da' punti A, C, dovrà aver per luogo geometrico quel piano perpendicolare alla AC nel punto medio di essa. Finalmente, per la stessa ragione, un tal centro dovrà aver per luogo geometrico l' altro piano perpendicolare alla AD nel suo punto medio. Or questi tre piani sono dati di sito (*88. e pr. 25*): quindi sarà anche dato il sito della retta in cui due di essi s' intersegano, e l' incontro di questa col terzo di essi piani; il quale incontro è il centro della sfera cercata.

Ciò posto, potendosi i piani di projezione prendere ad arbitrio, per render più agevole la costruzione grafica del problema, prendasi per piano orizzontale l' una delle facce ABC della piramide, e sopra di esso sia projettato in *d* il vertice D dell' angolo, che gli è opposto, e congiungasi

(*) La costruzione in questo caso è a dirittura come quella del n. I. cas. 1.

la Ad , cui si tiri una qualunque parallela LM , per la quale si concepisca passare il piano di projezione verticale ; cadranno le projezioni verticali de' punti A , B , C nella LM in A′ , B′ , C′ , e quella del punto D cadrà in un punto d' della perpendicolare d D′d' ad essa LM .

Or , si bisechino le AB , AC , e da' loro punti medj e , f le si erigano , nel piano ABC , le perpendicolari eg, fg ; saranno queste le tracce orizzontali di due piani verticali perpendicolari ad esse AB , AC ne' loro punti medj : e dovendo il centro della sfera cercata trovarsi nell' intersezione di questi piani , ch' è perpendicolare in g al piano ABC ; sarà perciò g la projezione orizzontale di tal centro .

Ma dovendo essere , a cagione della posizione data al piano verticale , la AD parallela alla sua projezione verticale A′d'; il piano perpendicolare alla AD nel suo punto medio , lo dovrà essere anche al piano verticale , e passare con la sua traccia pel punto h' medio della A′d' ; sarà perciò questa traccia dinotata dalla perpendicolare $g'h'$, tirata per h' alla A′d' . E dovendo il centro cercato esistere in esso piano ; dovrà la projezione verticale sua cadere nella $h'g'$: sarà dunque questa il punto g',ove la perpendicolare gG′g' , da g abbassata sulla LM , incontra essa $h'g'$. Finalmente , essendo Ag , A′g' le projezioni definite del raggio della sfera, è chiaro , che se prendasi su la LM , dal punto G′, la G′F′ uguale alla Ag, congiunta la g'F′ , sarà questa quanto un tal raggio.

278.Scol.1.Risultando dall' analisi del precedente problema , che l' intersezione de' piani per le eg , fg , perpendicolari al piano ABC , sia la perpendicolare elevatagli dal punto g centro del cerchio circoscritto al triangolo ABC , si vede , che la costruzione recata riducasi alla quì appresso .

Circoscrivasi il cerchio al triangolo ABC , e dal suo centro g si elevi al piano del triangolo la perpendicolare , le

cui projezioni saranno il punto g, e la perpendicolare $G'g'$ alla LM: l'incontro di quella perpendicolare col piano normale alla AD nel suo punto medio, sarà il centro della sfera cercata.

279. Scol. 2. È facile a rilevarsi, che l'analisi geometrica del precedente problema, sia una modificazione dell'analisi geometrica dell'altro recato nella prop. 70.

PROPOSIZIONE XCV.

PROBLEMA.

280. Iscrivere la sfera in una piramide triangolare data.

Prendasi, come nel problema precedente, per piano orizzontale la base della piramide data, e fatti passare pe' tre lati di tal base altrettanti piani, che le sieno inclinati ad angoli, ciascuno quanto la metà di quello in cui le sono inclinate le corrispondenti facce di essa piramide (*pr. 24, 26, e n. 105*); dovrà il centro della sfera cercata esistere, in ognuno di questi piani; che perciò esso si esibirà determinando l'intersezione de' suddetti piani, che lo contengono (*pr. 28.*).

Ma la costruzione grafica della precedente analisi del problema può con più eleganza ottenersi nel modo qui appresso indicato.

Sieno a, a' [*fig. 94.*] le projezioni del vertice della piramide proposta, e BCD la sua base, la quale prendasi per piano di projezione orizzontale. Si abbassi da a su di un lato BC la perpendicolare ah, e troncata su la LM, dal punto A', la A'H' uguale alla ah, si unisca la a'H'; sarà l'angolo A'H'a' uguale all'altro A ha, cioè all'inclinazione della faccia della piramide, che passa per BC, alla sua base BCD: e bisecando l'angolo A'H'a' con la H'f', sarà il pun-

to p', ove questa $H'f'$ incontra la $A'a'$, la projezione verticale di quello dove l'altezza Aa della piramide è incontrata dal piano, che biseca l'angolo, che il piano ABC comprende con la base BCD della piramide. Quel tal piano potrà dunque esibirsi. E nel modo stesso si potrà anche esibire ciascuno degli altri due in cui esiste il centro cercato; che perciò questo resterà agevolmente determinato adoperandovi la costruzione della prop. 28.

LEMMA.

281. *Le tre rette che congiungono i punti corrispondenti delle scambievoli intersezioni di tre cerchi, o concorrono in un medesimo punto, o pur sono parallele tra loro.*

Cas. 1. Sieno EFG, IGH, HIE [*fig. 95. n. 1. e 2*] i tre cerchi che s'intersegano ne' punti F, E; G, K; H, I, e congiunte le GK, EF, queste si taglino in a: dico che l'altra retta IH debba anche incontrarsi con le precedenti due in a.

Imperocchè si unisca la Ia, e questa, s'è possibile, non passi per H; ma interseghi il cerchio GHI in S, e l'altro EFH in R; saranno uguali i rettangoli RaI, EaF delle parti delle corde RI, EF del cerchio HIE. Ma il rettangolo EaF è uguale all'altro GaK, essendo le FE, KG corde dello stesso cerchio GKE; e questo rettangolo GaK è finalmente uguale all'altro SaI, perchè GK, ed IS sono corde del medesimo cerchio GKH. Dunque sarà il rettangolo BaI uguale all'altro SaI; e perciò aS uguale ad nR: il che essendo impossibile, dovrà la HI passare necessariamente per a.

Cas. 2. Che se la GK suppongasi parallela alla HI [*fig. 96*], dovrà anche la FE esser parallela ad entrambe. Poichè se la FE incontrasse la GK in a, congiunta la aI, si dimostrerà come nel cas. 1., che questa non possa intersegare i due cerchi GHI, HFF in due punti diversi, ma che debba passa-

re per H. Adunque la HI non sarebbe perallela alla GK, come si è supposto; che perciò la FE dovrà esser necessariamente parallela alla GK.

282. Cor. 1. E facile a rilevarsi, dalla precedente dimostrazione, quest' altra verità, cioè, che:

Se nella linea retta FE [fig.95 n.1 e 2], che unisce i punti d' intersezione F, E de'due cerchi FGE, HIE, si prenda un punto a ad arbitrio, dal quale si tirino a que' due cerchi le corde GK, IH; per gli estremi G,K,I,H di queste dovrà passare un cerchio.

Imperocchè è chiaro, che i rettangoli G*a*K, I*a*H sono uguali tra loro, essendo ciascun di essi uguale al rettangolo K*a*F.

283. Cor.2. Inoltre si rileva anche chiaramente, che se la GK [*fig.96.*] si bisechi in Y, dal qual punto si elevi ad essa la perpendicolare; questa dovrà passare pe' centri B,C de' due cerchi GFK, GHI, che intersegansi. E per la stessa ragione, se la HI si divida per metà in Z, d'onde le si elevi la perpendicolare; questa dovrà passare pe' centri C, D de' centri GHK, HEF, che anche s' intersegano. Laonde se le GK, HI suppongansi parallele, le CB, CD, che sono le perpendicolari condotte ad esse dallo stesso punto C, dovranno formare una sola retta; e perciò:

Se risultino parallele le congiungenti le intersezioni rispettive di tre cerchi; i loro centri giaceranno in una medesima linea retta. Ed al contrario.

284. Scol. Dalla precedente dimostrazione derivano facilmente i due teoremi, che recansi qui appresso.

TEOREMA I.

285. *Se tre sfere s' intersegano scambievolmente, i piani de' cerchi in cui s' incontrano, due a due, dovranno concorrere in una medesima retta perpendicolare al piano*

che passa pe' centri di esse sfere, o pure esser parallele tra loro.

Imperocchè sieno GKH, HEF, GKE [*fig.95.n.1,e2*] i tre cerchi generatori delle sfere proposte, segnati nel piano che passa pe' centri C, D, B di queste; e congiunti i punti corrispondenti delle intersezioni di tali cerchi, queste congiungenti concorrano primieramente in *a*. È chiaro che nel rivolgersi i cerchi GIH, HIE intorno a' loro diametri coincidenti colla CD, ch'è la congiungente i loro centri, per generar due delle proposte sfere, la retta IZ, ch'è perpendicolare alla CD, descriverà quel cerchio, ch' è l'intersezione di tali sfere, il cui piano sarà perpendicolare al piano BCD. Similmente rivolgendosi i cerchi HIE, EKG intorno a que' loro diametri, che coincidono con la congiungente BD de' loro centri; le sfere da essi generate s' intersegheranno nel cerchio, che avrà per diametro la FE perpendicolare alla BD, ed il cui piano sarà pure perpendicolare al piano BCD. Ed in simil guisa si vedrà, che la sfera generata dal cerchio EKG, e l' altra descritta dal cerchio GKH s' intreseghino nel cerchio descritto dalla GY, il cui piano è perpendicolare al piano CBD. Or i diametri GK, HI, FE di questi tre cerchi s' intersegano in *a*, ed i loro piani sono perpendicolari allo stesso piano BCD. Adunque essi cerchi si dovranno intersegare in una retta perpendicolare in *a* al piano BCD.

Che se le rette GK, HI, FE [*fig.96.*] fossero risultate parallele tra loro; in tal caso i cerchi d' intersezione delle proposte sfere, avendo per loro diametri rispettivi queste rette, ed i loro piani essendo normali alla stessa retta BCD, dovranno esser anche paralleli tra loro.

TEOREMA II.

286. *Tre superficie sferiche, le quali non abbiano i loro centri in linea retta, se interseghinsi scambievolmente, avranno due soli punti di comune.*

Sieno, come poc'anzi, GKH, HFE, GKE [*fig.95.n.1.*] i cerchi generatori delle tre sfere proposte, segnati nel piano che passa pe'centri di esse, e congiungansi i punti corrispondenti delle intersezioni di questi cerchi con le GK, IH, EF: dovranno queste necessariamente concorrere in uno stesso punto *a*(*lem.pr.*). Per lo che essendo uguali i rettangoli G*a*K, I*a*H, E*a*F; dovrà a'tre cerchi d'intersezione corrispondere, per lo punto *a* comune a' loro diametri, una stessa semiordinata, la quale sarà perpendicolare al piano BCD (*teor.1*): quindi le loro semicirconferenze, che sono al di sopra del piano BCD, dovendo passare tutte tre per l'estremo di questa semiordinata, verranno ad avere un punto di comune; ed un altro ne avranno quelle, che restano dalla parte di sotto dello stesso piano BCD: ond'è che queste tre circonferenze s'intersegheranno scambievolmente in due punti, e perciò anche in questi due punti s'intersegheranno scambievolmente le superficie delle tre sfere proposte.

Ed è manifesto, che se il punto *a* di concorso delle corde GK, IH, EF cadesse nel loro prolungamento [*fig.95.n.2*], e però al di fuori de' cerchi GKH, HFE, GKE; le superficie sferiche intersegantisi non avranno que' due punti comuni a tutte tre esse.

PROPOSIZIONE XCVI.

PROBLEMA.

287. In una piramide triangolare dati i suoi sei lati; esibire l'altezza del vertice di ciascun suo angolo sul piano opposto, ed il punto ove questo è incontrato da quella perpendicolare.

Il triangolo BCD [*fig.95.n.1.*] rappresenti la base della proposta piramide, ed O il vertice di essa; si vuol esibire il punto a ove la perpendicolare Oa abbassata da O sul piano opposto BCD incontra un tal piano, e di più la grandezza di tal perpendicolare.

COMPOSIZIONE GEOMETRICA.

Co' centri B, C, D, e co' raggi α, β, γ uguali respettivamente a' tre rimanenti lati della piramide proposta si descrivano i tre cerchi KEG, HKG, HIE, i quali s' interseghino scambievolmente ne' punti E, F; I, H; K, G, e si uniscano le EF, GK, IH; che si dovranno intersegare nel punto a (*lem.prec.*), il quale sarà quello ove la perpendicolare cercata incontra il piano BCD. E tal perpendicolare sarà quanto la media proporzionale aO ritrovata tra Ga, ed aK.

Imperocchè congiunta la Ba, sarà $BO^2 = Oa^2 + aB^2 = GaK + aY^2 + BY^2 = KY^2 + BY^2 = BK^2$: quindi sarà $BO = BK = \alpha$, e così dimostrando, che CO sia quanto β, DO quanto γ; sarà perciò il punto O il vertice della piramide proposta, ed Oa la sua altezza.

288. Scol. Un tal problema offre, per mezzo dell' intersezione di tre superficie sferiche costruita in modo geometrico, una terza soluzione assai elegante del problema di:

Descrivere una sfera di dato raggio, che ne tocchi tre altre date di sito, e di grandezza,
di cui le altre due furono esibite nella prop. 71.

Offre inoltre ancor quella di:

Determinare un punto nello spazio, date le distanze di esse da tre altri punti di sito.

PROPOSIZIONE XCVII.

PROBLEMA.

289. Assegnare quel punto, che congiunto con tre altri dati, sia una delle congiungenti a ciascuna delle altre due in ragioni date.

290. Part. 1. Suppongasi primieramente, che il punto cercato debba esistere nel piano stesso de' tre dati, B, C, D [*fig.* 97.], e sia esso il punto *a*, e congiunte le *a*B, *a*D, *a*C, sia *a*B : *a*D :: *m* : *n*, ed *a*B : *a*C :: *m* : *r*.

Essendo dati i punti B, C, e data pur la ragione di B*a* ad *a*C; il punto *a* si apparterrà ad una retta di sito, o ad una data circonferenza di cerchio, col centro dato in un punto della BC; secondo che quella ragione sia di uguaglianza, o di inegualità (*not. al n. IV. pr. 93*). E similmente per esser dati i punti B, D, e la ragione di B*a* ad *a*D, il punto *a* si apparterrà ad un' altra retta di sito, o ad una circonferenza di cerchio data, col centro in un punto dato della BD. E però dall' intersezione di tali luoghi risulterà il punto richiesto *a*.

291. Part. 2. Che se il punto cercato richieggasi fuori del piano de' punti dati BCD, cioè che vogliasi:

Determinare il vertice della piramide triangolare dati i lati della base BCD, e quelli al vertice A [*fig.* 98.] essendo in date ragioni.

Nel piano del triangolo BCD si assegnino i luoghi geometrici rispettivi di que' punti, che dieno, per la BC, la BA ad AC in data ragione, per la BD, la BA ad AD in data ragione, e similmente per la CD. È chiaro, che tali luoghi, che secondo la qualità di quelle ragioni potranno essere rette, o semicirconferenze (*not.al n.IV.pr.93.*), si concepiscano rivolgersi circolarmente intorno ad esse BC, BD, CD, prese per assi, genereranno que' piani, e quelle superficie sferiche, le quali saranno i luoghi corrispondenti del punto A nello spazio; che rimarrà però determinato dalla loro intersezione scambievole, quando questa, per la natura de' dati del problema abbia luogo.

Ed è facile rilevare, che rimarrà indeterminato il problema: I° Se le ragioni de' lati AB, AC, AD sieno di eguaglianza; risultando sol nota la retta in cui è allogato ciascun punto, che vi soddisfa, cioè la perpendicolare al piano BCD, dal centro del cerchio circoscrittibile a questo triangolo: II° Che dovendo risultare il punto A dall'intersezione di due superficie sferiche, e da quella di un piano, che sono le locali nel caso di una sola di quelle ragioni di eguaglianza, e le altre due per conseguenza uguali tra loro, rimarrà indeterminato, quando la traccia di tal piano su quello del triangolo BCD non incontri la congiungente i punti d' intersezione de' cerchi generatori delle sfere, i quali sono sul medesimo piano BCD, tra que' punti. III°. Finalmente, nel caso più generale, che quel punto risulti dall' intersezione di tre superficie sferiche, se le congiungenti i punti d' intersezione de' loro cerchi generatori, nel piano del triangolo BCD, converranno nel loro prolungamento.

E quando nel II°, o III° caso il problema risulti possibile, quel punto d' intersezione darà nel piano del triangolo BCD, il piede dell'altezza della piramide, stabilendone il sito di questa; e la sua grandezza si otterrà nel modo assegnato nel n. 286.

PROPOSIZIONE XCIX.

PROBLEMA.

292. Esibire il vertice di una piramide triangolare, dati i lati della base, e gli angoli compresi dalla sua altezza co' lati dell' angolo verticale.

Dal punto *a* [*fig.98.*], ove l'altezza della proposta piramide incontra la base, s' intendano tirate a' vertici degli angoli B, C, D di questa le rette *a*B, *a*C, *a*D; risulteranno dati di specie i triangoli B*a*A, C*a*A, D*a*A, come quelli che, oltre all' angolo retto, hanno un angolo dato. Quindi sarà data la ragione, che ciascuna di esse tre rette serba alla *a*A stessa; e per conseguenza quella dell' una di esse all' altra.

Se dunque determinisi il punto *a*, d'onde tirate a' punti dati B, C, D le rette *a*B, *a*C, *a*D, queste sieno nelle ragioni date (*pr. 97. part.I.*), si avrà il punto *a*, ove l' altezza della piramide proposta incontra la base. E ritrovando in ordine a' termini della ragione data, che una delle tre rette B*a*, C*a*, D*a*, la B*a*, per esempio, serba alla *a*A, ed alla stessa B*a* la quarta proporzionale; avrassi l' altezza A*a*. Si è dunque determinato il sito del vertice della piramide proposta (*pr.11.*).

Si potrebbe anche esibire l' altezza di tal piramide nel seguente modo, cioè. Determinato come poc' anzi il punto *a* [*fig.94.*], ch' è la projezione del vertice di essa sul piano della base, il quale prendasi per quello di projezione orizzontale, si abbassi da *a* sulla LM la perpendicolare indefinita *a*A'*a*'; e preso sulla stessa LM, dal punto A', la A'B' uguale alla B*a*, si constituisca al punto B' della B'A' l'angolo A'B'*a*' uguale al dato *a*BA, nella *fig.98*, il quale è complemento dell' angolo BA*a*; il punto *a*' sarà l' altra proje-

zione del vertice della piramide proposta: e la retta A'a' dinoterà l' altezza di essa.

293. Scol. Il precedente problema si è qui recato, non solamente perchè fa serie con quelli considerati da' moderni geometri per la piramide triangolare; ma ancora perchè dal Monge, e da altri geometri descrittivi francesi, costruiscesi per mezzo delle intersezioni di tre superficie coniche. Il qual modo di risolverlo era assolutamente da tralasciarsi, non solo per la sua complicata costruzione, per nulla comparabile alla semplicissima, ed elementare, che se n' è recata; ma ancora per evitare una inutile discussione delle soluzioni apparenti, a' quali quel modo di risolverlo dà luogo, per l' improprietà delle locali, che vi si adoprano a costruirlo.

PROPOSIZIONE C.

PROBLEMA.

294. Dati in una piramide triangolare i lati della base, ed i tre angoli al vertice di essa; costruire questo punto, *cioè*, esibirne la projezione, e l'altezza sul piano della base della piramide.

SOLUZIONE GRAFICA

ANALISI GEOMETRICA

295. Riferendo il vertice A, che vuol esibirsi nella piramide ABCD [*fig.98.*], alla sua base BCD presa come piano di sito, nel quale è data la posizione del triangolo BCD; è evidente, che nel triangolo BAD, essendo dato l' angolo BAD, e'l lato BD, che gli è opposto, il punto A, se fosse in un piano qualunque condotto per la BD, si apparterebbe alla circonferenza del cerchio descritta in esso sulla BD, capiente l' angolo dato BAD (*21.El.III*); e ritrovandosi nello spazio

debba avere per suo luogo geometrico la superficie generata da tal circonferenza rivolgendosi dintorno alla sua corda BD.

Similmente, per esser dato, nel triangolo BAC il lato BC, e l'angolo opposto BAC, il punto A si apparterrebbe alla superficie di rivoluzione generata dal segmento di cerchio descritto sulla corda BC, capiente l'angolo dato ad essa opposto BAC.

E lo stesso pel lato CD, e 'l suo angolo opposto CAD.

Laonde il vertice A risulterà dall'intersezione di queste tre superficie di rivoluzione, o sia sarà l'un de' punti ad esse comune. E però costruendo graficamente l'intersezione di una di tali superficie di rivoluzione con ciascuna delle altre due (*pr.87.cas.1.*); i punti ove s'intersegheranno le projezioni rispettive di tali intersezioni, nel piano di sito del triangolo BCD, preso per l'orizzontale di projezione (*), daranno le projezioni orizzontali di tante piramidi della base BCD, e col vertice in uno di que' punti d'intersezione, quante ne può offrire il problema proposto; e però i *piedi* rispettivi delle loro altezze. E le intersezioni verticali di quelle projezioni, esibiranno le altrettante projezioni verticali del vertice di quelle piramidi; e quindi le rispettive altezze di esse.

DETERMINAZIONE.

296. S'indichino con P, Q, R [*fig.99.*] i segmenti di cerchio BFD, BGC, CED descritti sulle BD, BC, CD capaci de' corrispondenti angoli dati al vertice A della piramide; e come che ciascun di essi ne porta seco, con le stesse condizioni, il segmento supplementale, cioè il rimanente segmento di cerchio su la stessa corda; e che rivolgendosi dintorno alla corda corrispondente l'uno, vi si rivolge ancora l'altro;

(*) Per maggiormente agevolare tal costruzione grafica, starà bene, che l'un de' lati del triangolo base della piramide, pongasi in sito da esser perpendicolare alla comune sezione de' piani di projezione.

però i casi di questo problema verran dinotati dalle combinazioni diverse di tali sei segmenti a tre a tre; e quindi risulterebbero al numero di *venti*.

Or indicando con p, q, r i rispettivi segmenti supplementali BfD, BgC, CeD degli altri P, Q, R, le suddette combinazioni di tutti essi, saranno le seguenti

I.	P, Q, R	Q, R, p	P, R, q	P, Q, r		
II.	p, q, r	q, r, P	p, r, Q	p, q, R		
III.	P, Q, p	P, Q, q	Q, R, q	Q, R, r	P, R, p	P, R, r
IV.	p, q, P	p, q, Q	q, r, P	q, r, R	p, r, P	q, r, R

Ma di queste è evidente, che debbano rigettarsi le sei *n*.III e le sei *n*. IV; poichè è impossibile l'intersezione di un segmento col suo supplementale(*10.El.III.*), e quindi quelle delle superficie di rivoluzione da essi generate, girando intorno alla corda comune; sicchè non rimarranno a risolvere il problema, che le prime otto, segnate da' num.I. II. E però il problema proposto è generalmente suscettivo di otto soluzioni diverse, corrispondenti ciascuna a ciascuna delle combinazioni di segmenti di cerchio descritti su'lati BD, BC, CD del triangolo BCD, co'rispettivi angoli in essi compresi.

Or riflettendo, che ciascuna delle quattro *n*. I. corrisponde identicamente alla rispettiva nel *n*. II., o sia, che ne trae per conseguenza l'altra, come la P, Q, R con la p, q, r, la Q, R, p con la q, r, P, e così delle altre; sarà facile conchiuderne, che la vera, e necessaria ricerca del problema riducasi a sole quattro soluzioni diverse: su di che verrà più particolarmente ragionato nello scolio quì appresso; e però che debba la natura, ed il grado di esso limitarsi al *quarto*, ed esser quindi costruibile con la combinazione di due cur-

(*) L'esecuzione grafica della costruzione indicata nel precedente problema, potrà vedersi eseguita con eleganza, e precisione di disegno, nel *Supplemento I.* del sig. Hachette.

ve coniche, o di una di esse col cerchio, come il dimostra col fatto la seguente elegantissima

SOLUZIONE GEOMETRICA DI G. SCORZA (*)

ANALISI.

297. Sia ABCD [*fig. 100*] la piramide richiesta, di cui ABC sia la base, che rappresenti un piano di sito, l'orizzontale, e D il vertice: sarà dato di grandezza l'angolo solido in D (*23. El. XI*); e preso un qualunque angolo ADB di quelli, che il comprendono, è chiaro, che sia pur data la porzione di cerchio ADB, che n'è capace, ed è descritta sulla data retta AB; ed il piano di essa dovendo inclinarsi a quello ACB in un dato angolo, sarà ancor dato di sito. Or abbassando dal punto C sulla AB la perpendicolare CE, sarà essa data in grandezza, e di sito il punto E, dal quale se elevisi, nel piano ADB, la EX perpendicolare alla AB, risulterà data di sito; ed ancora di sito sarà data la perpendicolare, che da C tirasi al piano ADB, la quale cade nella EX. Ma que'due piani sono dati di sito, a cagione del dato angolo solido D; quindi sarà data la loro comune sezione DF, e con ciò saranno dati gli angoli ADF, FDC; e sarà pur dato l'arco AG su cui ne insiste l'angolo ADF: ed il punto G sarà dato di sito, ed il triangolo rettangolo CFD sarà dato di specie; onde sarà data la ragione del quadrato di CF all'altro di FD, che sia espressa da quella della retta H all'altra I. Per la qual cosa, prese nella retta FE, d'ambe le parti del dato punto E, le EK, EL uguali ciascuna alla data retta CE; saran dati di sito i punti K, L, ed il rettangolo KFL sarà uguale alla differenza de' quadrati di EF, e di EL, ovvero di

(*) Una tal soluzione fu pubblicata nella *divinazione della Geometria analitica degli antichi* — Nap, 1823. a pag. 291. e seg.

EC, cioè al quadrato di FC; onde, al pari di questo, sarà benanche il rettangolo KFL al quadrato di FD nella data ragione di H ad L.

Ciò posto, si uniscano le rette GK, GL, che seghino la circonferenza del cerchio ne' dati punti M, N; e dal punto D si tirino, su le date rette GM, GN, le DP, DO parallele alla data retta KL. E poichè la ragione del rettangolo KFL al quadrato di FD componesi dalle ragioni del rettangolo KFL al quadrato di FG, e del quadrato di FG a quello di FD, ovvero dalle loro uguali, cioè dalle ragioni del rettangolo PDO al quadrato di DG, e del quadrato di GK a quello di KP; sarà benanche H ad I in ragion composta del rettangolo PDO al quadrato di DG, e del quadrato di GK a quello di KP. Ma condotte dal punto D su le GM, GN le DR, DS parallele alla congiunta MN, ch'è data di sito, ed incontra la GD in un punto Q; sarà chiaro, che il rettangolo PDO stia al quadrato di DG in ragion composta del rettangolo PDO al rettangolo RDS, e di questo al quadrato di DG; delle quali ragioni la prima u'è data, pe' triangoli dati di specie DPR, DOS, che pongasi uguale a quella della retta GM all'altra T; e la seconda ne pareggia la ragione del rettangolo MQN, e del suo uguale DQG al quadrato di QG, cioè alla ragione di DQ a QG, ovvero di RM ad MG. Adunque sarà pure il rettangolo PDO al quadrato di DG in ragion composta di RM ad MG, e di MG a T, cioè come RM a T. Ma si è dimostrato dianzi essere H ad I in ragion composta del rettangolo PDO al quadrato di DG, e del quadrato di GK a quello di KP. Dunque sarà ancora H ad I in ragion composta di RM a T, e del quadrato di GK a quello di KP: e ponendosi il quadrato di GK uguale al rettangolo di T in V; sarà H ad I in ragion composta di RM a T, e del rettangolo di T in V al quadrato di KP, vale a dire come il parallelepipedo, che ha per base il rettangolo di RM in V, e per altezza la retta T, al parallelepipedo, che ha per ba-

se il quadrato di KP, e per altezza la stessa T, ossia come il rettangolo di RM in V al quadrato di KP; e compiti i parallelogrammi RK, PX, sarà H ad I, come il rettangolo di UD in V al quadrato di DX; e perciò il punto D sarà ad una parabola.

Ma n' è ancora alla data circonferenza del cerchio ADB Dunque un tal punto sarà dato.

SOLUZIONE MECCANICA DEL PROBLEMA STESSO.

298. Si costruisca con l' ajuto di una scala geometrica un triangolo *bcd* (*fig.101*) simile a quello, che risultà dal congiungente i tre punti dati, che sono i vertici della base della piramide proposta; e costruito un' angolo solido A co' tre angoli dati al vertice A di tal piramide; si vada adattando quel triangolo *cbd* dentro a quest' angolo in modo, che i vertici *b*, *c*, *d* degli angoli suoi corrispondano a que' lati dell' angolo A, che sono ad essi rispettivi: è manifesto, che quando si sarà pervenuto a far cadere i punti *b*, *c*, *d* su i lati dell' angolo A; dovranno le A*b*, A*c*, A*d*, che restano in tal modo determinate, esprimere in parti della stessa scala i lati della piramide proposta, cioè le tre rette, che dal punto cercato vanno a' tre punti di sito.

Ciò premesso, se dal vertice A si abbassino sulle basi *bc*, *dc* de' due triangoli dati *b*A*c*, *b*A*d* le perpendicolari A*e*, A*f*, e poi da' punti *e*, *f* si elevino alle stesse, nel piano *bcd*, le perpendicolere *ea*, *fa*; congiunta la A*a*, sarà questa, come facilmente si comprende, l' altezza della piramide A*bdc* determinata di grandezza, e di sito, dalla quale sarà facile ricavare, per mezzo della scala stabilita, la grandezza, e 'l sito di quella della piramide proposta, cioè la posizione del punto cercato.

SCOLIO.

299. Questo famoso problema, che a tanta varietà di opinioni ha dato luogo per la sua natura, fin da che l' insigne Lagrange il promosse negli *Atti di Berlino, per l' anno 1773*, merita per tal riguardo uno speciale esame, che risulterà di grandissimo vantaggio alla scienza geometrica, per l' investigazione delle effettive soluzioni costituenti la natura di un problema. Ed essendo stato alla fine trattato in nostra scuola, ed elegantemente risoluto per le pure vie geometriche dallo *Scorza*, come si è veduto, e dal *Bruno* dedotto come un caso particolare dall' altro di: *adattare un triangolo dato di specie, co' suoi vertici, tra un punto dato, e due rette comunque date di sito nello spazio*; da che sono derivate importanti ricerche sul medesimo con l' analisi moderna, ho però creduto conveniente compierne un lavoro connesso, e speciale, che formerà il vol. V. degli *Opuscoli matematici*, come mi trovo aver annunziato nel prospetto di essi. Ma intanto ad evitare gli equivoci, che potrebbero intrudersi nelle menti de' giovani, che s' imbattessero a leggerlo, nella prima edizione della *Géométrie déscriptive* del Monge (*an. 1797*), o nella seconda con supplementi dell' Hachette (*an. 1811, e 1818*), o in quella dal Lacroix (*an. 1795, e seg. per le altre*), o in tante altre trattazioni di esse, è necessario, che qualche cosa quì si accenni de' risultamenti a' quali daranno luogo le considerazioni più particolari, che vedransi nel vol. suddetto di *Opuscoli*.

E prima l' illustre Monge, attenendosi alle semplice considerazione del grado di ciascuna di quelle superficie di rivoluzione, per le intersezioni delle quali il costruiva, ascendendo l'equazione per ognuna di esse al *quarto*, ne conchiuse essere il problema di 64° grado. Ma ciò non era un difetto della scienza geometrica; sì bene dell' aver adoperato a risolverlo mezzi assai superiori a quelli, che regolarmente

si richiede. Che certamente se a risolvere un problema piano si adoperi una curva conica, o anche se vogliasi una curva meccanica, non però il problema diverrà solido, o trascendente.

Nè quest' uomo illustre, cui la scienza analitico-geometrica or tanto deve, avvertì la soluzione algebrica accennata dal Lagrange, in una delle sue lezioni alle *Écoles normales*, ove contemporaneamente ancor egli insegnava, come dovè fare il Lacroix, il quale nel suo *Essais de Géométrie sur les plans, et les surfaces courbes* (an. 1795) notò, sebbene con improprietà geometrica, che: *ce problème est en général du huitième degré: on peut cependant dans sa construction reduire le nombre des solutions à quatre*. Ma dopo che ebbi, ne' miei *Elementi di Geometria descrittiva*, rilevati, nel modo esposto precedentemente (n. 296), siffatti casi, vi rivenne ancora il dotto, e laborioso geometra Hachette, facendo ogni sforzo, per provare, che tal problema ammetta 16 soluzioni; e volendo ricavare ciò dal fatto, valendosi di un' esatta costruzione grafica dell'analisi recatavi dal Monge, ch'è la prima nostra, e che nè pure gli dava costantemente un tal numero di punti, secondo la diversa grandezza, e posizione de' dati da' quali partiva per eseguirla (*). Ed è facile accorgersi, che un tal elevamento di soluzioni, e que' punti, che l'Hachette trovava soddisfarvi, non erano, che il raddoppiamento della soluzione del problema, eseguendola al di sopra, ed al di sotto del piano della base del triangolo, preso come piano di sito da riferirvi la costruzione di esso: a che se dovesse riguardarsi, al certo che ogni problema di Geometria elementare costruito col cerchio avrebbe non due, si ben quattro soluzioni diverse; donde tutta la scienza geometrica per la natura de' problemi rimarrebbe conturbata. Nè tampoco quelle otto combinazioni

(*) Vegg. la 2. edizione della *Géométrie déscriptive* del Monge, ed i supplementi ad essa (an. 1811, e 1818.)

diverse, che ne' n. I. II. della *determinazione* (n.296) sonosi recate, presentano otto soluzioni del problema, sicchè potesse aver luogo l'espressione del Lacroix, che *quel problema sia in generale dell' ottavo grado*; poichè la metà di esse essendo conseguenza dell' altra, non costituisce soluzioni diverse, nè entra a parte del grado di esso: mentre il vertice A della piramide risultante dagli angoli ne'segmenti P, Q, R, e quello *a* dell' altra con gli angoli ne' segmenti supplementali *p*, *q*, *r*, non costituiscono, che una sola soluzione, risultando necessariamente l' una per conseguenza dell' altra, come per l' appunto non sono due diverse soluzioni del problema di: *costituire ad un punto dato in una retta data un angolo uguale ad un dato*, l' angolo assegnato, o il suo conseguente; nè per la costituzione dell' angolo solido con tre angoli piani dati, sono soluzioni distinte quelle, che risultano per conseguenza da ciascuno de'tre angoli dati, ed i conseguenti degli altri due; il che se fosse un tal problema piano si troverebbe cambiar di natura.

E ben ciò indicavano le stesse costruzioni grafiche, per tal problema fatte con tanta diligenza eseguire dall' Hachette, e sulle quali egli tanto ben ragiona, nel descrivere le tavole C, D del suo I°. supplemento, ove al n. 127 rileva, che: » *les nappes extérieures d' une part, et les nappes in-*
» *térieures, de l' autre, se coupent suivant une branche de*
» *courbe fermée, dont les projections peuvent être engendrées*
» *d' un mouvement continue par un point mobile. Il en est de*
» *même de la branche de courbe qui resulte de là combinaison*
» *de la nappe extérieure, ou intérieure de l' une des surfa-*
» *ces, avec la nappe interieure ou exterieure de l' autre sur-*
» *face. Ces deux combinaison donnent une seule courbe, qu'un*
» *point mobile peut suivre sans discontinuité* . . . . . .

E dal fin qui esposto, a tal riguardo, dovrà conchiudersi, che quella costruzione grafica, con tanto studio fatta eseguire dall' Hachette, non presenti altro vantaggio, che

quello di dare in disegno ad un tratto tutt' i punti soddisfacenti al problema, tanto sopra, che sotto la base della piramide, e non solo per le soluzioni principali, ma ancora per le conseguenze di esse.

La soluzione meccanica, che in ultimo si vede data ad un tal problema (288) l'è stata ad oggetto di ricordare un modo, che tennero gli antichi in risolvere que' problemi, che erano di un uso pratico; di che ce ne ha serbato Pappo un esempio, nella soluzione di Erone del problema delle due medie proporzionali, dandola come *maxime ad manuum operationes acomodata, iis qui architecti esse volunt* (*). Da che vedesi, non aver que' nostri saggi, ed accorti maestri, che tanto apprezzavano la purità della Geometria, abborrito dal ricorrere ancora a questo mezzo per l' invenzione in essa; e trarne quindi noi consiglio di non disprezzarne alcuno, per imperfetto, che il credessimo, chè all' uopo potrà trovarsi atto a recarne alcun vantaggio.

Ma questa commutazione di forma del problema sulla piramide, di cui trattiamo, è ancor atta a presentarne facilmente la natura di esso, dando agevolmente l'equazione del quarto grado per la sua soluzione, prendendovi le indeterminate su due lati dell'angolo solido, dal vertice di esso, come potranno, per loro esercizio, ben vedere i giovani. E le soluzioni diverse di cui è suscettivo sarebbero per l' appunto quelle, che risultano dagli angoli A, B, C comprendenti il proposto, e da ciascun di questi combinato co' conseguenti degli altri due; ad ognun de' quali angoli solidi corrisponderebbe per base un triangolo simile al dato, per un punto comune preso in uno stesso lato, e per un altro de' quattro, corrispondenti alle radici dell' equazione al problema; e da quel verso del vertice stesso, che ne indica il segno rispettivo di esse.

(*) Di tal modo sono ancora quelle di Eratostene, e dello stesso Pappo.

Da che risulta aver su tal proposito equivocato l'illustre professore Hachette in conchiudere il secondo articolo della sua elaboratissima memoria: *Solution algébrique d'un problème de Géométrie a trois dimensions* (*) in continuazione a quella del nostro professore Bruno, di sopra accennata, col dire. » Il est donc démontré, que si l'on donne une pyra-
» mide triangulaire, et un point sur l'une des trois cotes de
» cette pyramide, *on peut en general mener par ce point*,
» *huit plans qui coupent la pyramide suivant un triangle*
» *d'une similitude donnée.*

Ma di tutto ciò, che vedesi qui accennato, ci serbiamo a ragionar più estesamente nel vol. V degli *Opuscoli matematici* come abbiamo promesso; da che molta luce si spanderà sulla natura de' problemi, e la loro determinazione, ch'è l'oggetto cui mirano principalmente tutti que' lavori, che in essi pubblicheransi.

(*) Atti della R. A. delle Scienze di Napoli vol. III.

PROPOSIZIONE CI.

PROBLEMA.

300. Dividere una piramide triangolare in quattro altre piramidi triangolari, le quali abbiano per basi le facce delle piramide data, e per vertice uno stesso punto dentro di questa; e che serbinsi tra loro rispettivamente ragioni date.

ANALISI GEOMETRICA.

Sia *a* [*fig.101.*] quel punto dentro la piramide triangolare data BCDA, per lo quale conducendosi piani, che passino anche pe' lati BC, CD, DB, DA, AC, AB di essa, resti tal solido diviso nelle quattro piramidi cercate BCA*a*, CDA*a*, BDA*a*, BCD*a*.

E poichè è data la ragione della piramide BCA*a* all' altra CDA*a*, ch'esprimasi per quella delle rette *m*, *n*; ed è di più data la ragione delle loro basi BAC, CAD date, che si dinoti con le rette *r*, *n*; sarà data anche la ragione delle loro altezze, cioè delle perpendicolari abbassate dal punto *a* su i piani BAC, CAD: ed essa verrà espressa, com'è chiaro, da quella di *m* ad *r*.

E similmente si vedrà esser data la ragione di ciascuna di queste perpendicolari alle altre, che dal punto stesso *a* si abbassano sugli altri piani BAD, BCD. Laonde il proposto problema si sarà ridotto all'altro di: *rinvenire nella piramide data un punto a, dal quale abbassando le perpendicolari sulle facce della piramide data, queste sieno tra loro in ragioni date.*

Or dunque dovendo essere le perpendicolari, che si abbassano da tal punto su i tre piani BCD, BCA, ACD in ragioni date; il punto dal quale esse debbon partire dovrà avere per

luogo geometrico una retta di sito, determinabile pel n.199. Ma perchè sono anche date le ragioni, che serbansi tra loro le perpendicolari, che da un punto stesso debbono cadere su i tre piani BCD, CAD, DAB, tal punto deve avere per suo luogo geometrico un' altra retta di sito determinabile pel numero medesimo. Adunque il punto soddisfacente al problema proposto sarà quello ove tali due locali s' intersegano. Ed esse dovranno necessariamente intersegarsi, perchè ciascuna dee cadere in quel piano, ch' è il luogo geometrico de' punti d' onde abbassandosi le perpendicolari su i piani BCD, CAD, sono queste in date ragioni tra loro. Adunque un tal punto si sarà rinvenuto. Ed il problema proposto potrà con facilità costruirsi, sia in modo puramente geometrico, sia graficamente.

301. Scol. La stessa soluzione avrebbe avuto luogo, se il problema fosse stato più generalmente enunciato nel seguente modo, cioè;

Dati quattro rettilinei in diversi piani di sito, che s' incontrino; determinare quel punto, che preso per vertice di quattro piramidi aventi per basi que' rettilinei, abbiano queste tra loro ragioni date.

PROPOSIZIONE CII.

PROBLEMA.

302. Tra due rette date ritrovar due medie proporzionali.

SOLUZIONE DI ARCHITA.

Sulla maggiore delle due rette date AB [*fig.103.*] si descriva il semicerchio AEB, e su di esso s' intenda eretto il semicilindro AEBIKL; poi sulla AB stessa, e nel piano del rettangolo LABI si descriva l' altro semicerchio AGB, il quale si concepisca rivolgersi dintorno al punto B, restando sempre verticale, e finchè la AB descriva un quarto di cerchio; genererà esso una superficie di rivoluzione, la quale intersegandosi con la superficie del semicilindro produrrà in questa la curva AOB. Inoltre la minore delle rette date si adatti dal punto B nel semicerchio AEB, e sia la BE; poi dal suo estremo E si abbassi sul diametro AB la perpendicolare EF, ed il triangolo EFB s'intenda rivolgersi dintorno al cateto FB, per generare un cono, la cui superficie indefinita interseghi quella del semicilindro nella curva ECH, e questa s'interseghi con l'altra AOB nel punto C. Ciò posto si abbassi da C sul piano sottoposto AEB la perpendicolare CD, che dovrà cadere nella superficie cilindrica, ed incontrar perciò la circonferenza del cerchio, che n'è base, in D: congiunte le BD, BC; saranno queste le due medie proporzionali cercate.

Imperocchè la BC incontri in M la circonferenza della base del cono suddetto, e dal punto M sul piano sottoposto AEB si abbassi la perpendicolare MN, la quale dovrà, com' è chiaro, cadere nella BD: poi si prolunghi la EF in *e*, finchè F*e* sia uguale ad FE; sarà E*e* il diametro del cerchio base del cono descritto dal triangolo EFB, ed il punto *e*

verrebbe a cadere nell' altra semicirconferenza del cerchio AEB. Adunque sarà MN' = ENe = DNR; e perciò se congiungasi la DM, il triangolo DMB sarà rettangolo in M. Ma producendo BD in a, finchè sia Ba = BA, e congiugnendo la aC, è chiaro, che il semicerchio verticale descritto su di aB debba passare per C, e perciò essere anche retto l'angolo aCB. Adunque i tre triangoli aCB, DCB, DMB essendo rettangoli, ed avendo comune l' angolo CBa, saranno simili. Laonde sarà aB, o AB : BC :: BC : BD :: BD : BM o BE; e perciò le BC, BD saranno le due medie proporzionali cercate.

303. Scol. Per la composizione di questo problema si richiede dunque di costruire l' intersezione della superficie del semicilindro con quella del solido di rivoluzione descritto dal semicerchio BGA; e poi l' intersezione della superficie dello stesso semicilindro con quella del cono descritto dal triangolo EFB: dall' intersezione di queste curve risulta il punto C, e quindi l' altro D, che soddisfano al problema. Or la prima di queste intersezioni ha evidentemente per projezione sul piano AEB [*fig.104*] la semicirconferenza AEB; e l' altra projezione di essa sul piano ABIL, preso come piano di projezione verticale, si otterrà facilmente se per lo punto B si conducano in tal semicerchio le corde BD, BE, *ec.* e poi per ciascuna di esse, la BD per esempio, si abbassi da D sul diametro AB la perpendicolare Dd, la quale si produca al di sopra nel piano ABIL, finchè la parte prodotta dc pareggi l' ordinata, che nel punto D corrisponde nel semicerchio descritto sopra aB uguale ad AB: l' estremo e di tal perpendicolare sarebbe la projezione verticale, che si corrisponderebbe a quel punto della curva, ch'è projettato in D sul piano orizzontale. E così di ogni altro.

Per costruire poi l' intersezione della superficie conica con quella del cilindro, cioè per determinare la projezione verticale di questa, giacchè l' orizzontale cade anche nel-

la semicirconferenza ADB, si determinerà la projezione verticale di quel punto di essa, ch'è projettato in D sul piano orizzontale, congiungendo la BD, ed immaginando condotto per essa un piano verticale; questo intersegherà il cilindro ne'suoi lati verticali, che passano per B, D, e del secondo de'quali si avrà la projezione, abbassando da D su di AB la perpendicolare indefinita D*dd'*. La superficie conica poi verrà dallo stesso piano intersegata in un suo lato, la cui projezione verticale si otterrà prendendo sulla EF prolungata la F*n'* uguale alla semiordinata, che nel punto N, ove la BD intersega la EF, corrisponde nel semicerchio base del cono; sarà B*n'* la projezione verticale di un tal lato del cono: ed il punto *c* ove la retta B*n'* intersega l'altra *dd'* sarà la projezione verticale di quel punto di questa seconda linea d'intersezione, il quale aveva per projezione orizzontale il punto D. E così facendo si verrà ad assegnare l'intera projezione verticale FcH di questa.

In tal modo l'ingegnosa soluzione di Archita verrà ad essere effettivamente costruita; nè potrà aversi per una semplice *curiosità geometrica*, come pensava il Montuela (*). Con che però essa non dovrà aversi come conveniente al grado del problema, perchè costruita con luoghi impropri.

(*) » Mais ce n'étoit là qu'une curiosité géométrique, uniquement » propre a satisfaire l'esprit, et dont la pratique ne sauroit tirer aucun » secours (*Hist. des Math.* pag. 175 vol. I. ediz. 2).

PROPOSIZIONE CIII.

TEOREMA.

304. È dato il sito di un punto A nello spazio, se sien date le distanze, ch' esso serba da tre altri punti B, C, D, già dati di sito nel medesimo.

Imperocchè essendo data la distanza del punto A dal punto B, si apparterrà il punto A alla superficie sferica del centro B, e del raggio dato BA, che ne sarà però un luogo *anastrofico* (*). Ed essendo ancor data la distanza di quel punto dall' altro C, si apparterrà esso all' altra superficie sferica del centro C, e del raggio CA; e ne sarà però luogo *diessodico* (*) la circonferenza del cerchio in cui tali due sfere intersegansi. In fine dall' esser data la distanza del punto A da D, avrà esso per terzo luogo la superficie sferica del centro D, e del raggio DA. Quindi sarà un di que' due punti riferiti al piano BCD, ne' quali le tre superficie sferiche s' intersegano (285).

È manifesto, per la determinazione del punto A, che debbano le distanze di esso da due de' punti dati, in qualunque modo prese, esser maggiori della distanza tra' punti stessi: cioè le BA, AC maggiori di AC, le BA, AD maggiori di BD, e le CA, AD maggiori di CD.

La composizione geometrica di questo problema è precisamente quella della prop. 96, della quale al contrario il presente ne offre l' analisi geometrica.

(*) *Vedi prefaz. a pag.* XXIII.

PROPOSIZIONE CIV.

TEOREMA.

305. È dato il sito di un punto A nello spazio, se sien date le distanze, ch' esso serba da tre rette già date di sito nel medesimo.

Imperocchè essendo data la distanza del punto A dall' una di tali rette, si apparterrà esso alla superficie cilindrica, a direttrice circolare, del raggio quanto la distanza data, e che ha per asse quella retta. Similmente, per esser data la distanza del punto A da un' altra delle rette di sito, avrà esso per luogo geometrico la superficie cilindrica di un tal asse, che ha per direttrice il cerchio del raggio la distanza data. E così pure per la terza retta di sito.

Adunque il punto dato, coesistendo in ciascuna delle tre superficie cilindriche suddette, risulterà dalla loro scambievole intersezione. Or siccome l' una di esse incontra ciascuna delle altre due in una linea; così ognun de' punti ne' quali queste s' intersegheranno sarà il proposto.

Ed è facile comprendere, per la determinazione de' dati nel presente teorema, che le due distanze del punto da ciascuna delle rette, non debbano, insieme prese, esser minori della distanza tra esse rette, cioè della perpendicolare loro comune; e nel caso, che pareggino tal distanza, la determinazione del sito del punto risulterà da esse sole, senza esservi bisogno della distanza dalla terza retta. Imperocchè le due superficie cilindriche, le quali ne sono le locali dovranno toccarsi nel punto proposto; il quale rimarrà però esibito con assegnare la minima distanza tra le due rette di sito, e dividerla poi nel punto ove si terminano le distanze date.

COSTRUZIONE PEL PUNTO CO' PRECEDENTI DATI.

306. Stabiliti i piani di sito, cui riferisconsi le tre rette date; saranno determinabili i punti in cui l' un di questi che sia l' orizzontale, è incontrato da quelle (*pr. 16.*): e saranno ancor date di sito, e di specie le ellissi de' centri que' punti in cui le superficie cilíndriche, con gli assi le rette date, incontrano quel piano (221, e 223). Laonde si potranno costruire le loro intersezioni, dalle quali rimarranno esibiti i punti, che hanno le condizioni del proposto.

307. Scol. La compiuta effettiva costruzione quì solamente indicata, potrà vedersi nella tav. B del supp. I, dell' Hachette, all' ediz. 2. della *Géométrie déscriptive* del Monge. E volendola rendere più semplice, si avrebbe potuto prendere l' una delle rette date perpendicolare al piano di projezione orizzontale; ed il verticale parallelo ad un' altra di esse. Nel che fare potranno utilmente esercitarsi i giovani.

SCOLIO

DE' DUE PRECEDENTI TEOREMI DI DATI.

308. A compiere la determinazione di un punto nello spazio, già cominciata nella prop. 15, di cui erano modificazioni le 11, e 12, abbiamo quì recati questi due altri teoremi, da' quali evidentemente risulta, che quel primo sia, tra' tre mezzi indicati, lo più semplice, sì geometricamente considerato, che per l' uso nelle arti del disegno, ove è stato però sempre il solo ad esser praticato.

E facile poi il vedere come, recedendo da questi determinanti uniformi del sito di un punto nello spazio, si possa ottenerlo dalla combinazione di tre di essi, come, per esempj, dando la distanza da due punti ed una retta, nel qual caso la costruzione di esso dipenderà dalle intersezioni di due superficie sferiche ed una cilindrica, o da due rette,

ed un punto di sito, costruendo l'intersezione comune di due superficie cilindriche, e di un'altra sferica; *ec.* Ma ciò basti averlo indicato, per offrire a'giovani pratici nel disegno geometrico un utile esercizio nella costruzione delle intersezioni delle superficie curve, non potendo riescire di alcun uso pel ramo di scienza geometrica, che quì trattasi.

Digitized by Google

CAPITOLO XVI.

CONSIDERAZIONI GENERALI SULLO SVILUPPO DELLE SUPERFICIE CURVE.

309. Def. xxi. Una superficie curva si dirà *sviluppabile*, se possa distendersi in un piano, da non restarne le sue parti interrotte nella loro continuità, nè che alcuna di esse ne copra un' altra.

310. Cor. Si rileva da ciò, che la superficie curva sviluppata debba rimanere della stessa grandezza di prima dello sviluppo.

311. Scol. L' oggetto di questo sviluppo è il poter disegnare più facilmente, e più comodamente le curve, che erano segnate sulla superficie sviluppabile; e può anche talvolta applicarsi convenevolmente alla soluzione di alcuni problemi: di che ne daremo un saggio nel presente capitolo.

PROPOSIZIONE CV.

TEOREMA.

312. Assegnare le condizioni geometriche dello sviluppo delle superficie curve.

Da' primi Elementi di Geometria è noto, che si possa sviluppare la superficie di un prisma, o di una piramide, non considerandovi basi; e che non sia sviluppabile quella di un qualunque altro solido poliedro. Or estendendo un poco la condizione, che rende possibile lo sviluppo, ne' due soprindicati solidi, si vedrà, che se in un piano si tirino le rette AB, AD, CF, EG, *ec.* [*fig.105.*], le quali s' incontrino due a

due in A, C, E, *ec.*, si potrà sempre immaginare, che rivolgendosi lo spazio angolare indefinito DCF intorno ad AD, si ponga ad angolo con l' altro BAD; che similmente rivolgendosi lo spazio angolare FEG intorno ad EF, si ponga ad angolo con DCF; e così in seguito: sicchè dall' insieme di tutti questi spazi BAD, DCF, FEG, *ec.* si verrà a rappresentare una superficie indefinita compresa da piani, che sarà sviluppabile. Adunque la condizione geometrica, perchè sia sviluppabile una superficie composta da piani è, che questi sieno indefiniti al meno per un verso. Or se, per la nota legge di continuità, dalla superficie del prisma si passi a quella del cilindro; dalla superficie della piramide a quella del cono; e dall' ultima superficie poc' anzi descritta si passi a quella superficie curva rettilatera la quale da essa, per l' anzidetta legge, si deriva, si potrà conchiudere generalmente, che:

Sarà sviluppabile una superficie curva, se i suoi lati rettilinei, o sien paralleli, o s' incontrino in un punto, o l' uno col continuamente prossimo ad esso; sicchè per ogni altro punto della medesima non possa passare, che una sola linea retta, cioè il lato della superficie per esso.

313. Cor. 1. Adunque il piano tangente una siffatta superficie curva in un punto, dovrà necessariamente toccarla in tutto il lato della medesima corrispondente a tal punto. E non sarà sviluppabile la superficie di una sfera, e quella di un qualunque solido di rivoluzione; come era già noto dagli Elementi.

314. Cor. 2. Allorchè, per la legge di continuità, la superficie sviluppabile rappresentata nella *fig. 105.* diviene una superficie curva, le AC, CE, EG, *ec.* costituiranno una curva a doppia curvatura, segnata nella superficie sviluppabile suddetta; ed i lati AD, CF, EG, *ec.* di quella, essendo i prolungamenti degli archetti AC, CE, EH, *ec.*, rappresenteranno le tangenti di tal curva in A, C, E, *ec.*

315. Scol. Le condizioni dello sviluppo delle superficie

curve si possono in più modi determinare. Noi qui ci siamo attenuti a quello primordiale, ed elementare, che la Geometria somministra; ed altrove imprenderemo a rinvenirlo per le vie dell'Analisi moderna, e col risolvere il seguente problema: *Ritrovare l' equazione generale per tutte quelle superficie che possono spiegarsi in un piano.*

PROPOSIZIONE CVI.

TEOREMA.

316. La tangente di una curva segnata sopra una superficie sviluppabile, comprende, sullo sviluppo di questa, con quel lato che passava per lo contatto, lo stesso angolo, che vi comprendeva prima dello sviluppo.

Imperocchè si supponga un tale sviluppo eseguirsi precisamente su quel piano, che passa per la tangente, e pel lato suddetto, e che perciò tocca quella superficie curva nel punto di contatto proposto; sarà manifesto, che allor quando un tale sviluppo si sarà effettuato, non avranno sofferta alcuna alterazione nel sito rispettivo, nè quel lato, nè quella tangente; perchè esistevano già nel piano dello sviluppo. Adunque è chiaro, che non dovrà mutarsi l' angolo, ch' esse rette comprendono.

317. Scol. Essendo facile il determinare l' angolo, che la tangente, in un dato punto, di una curva segnata in una superficie sviluppabile comprende col lato, che passa per lo contatto (*pr. 19.*), si vede in qual modo si potrà determinare, sullo sviluppo di questa superficie, il sito che vi prende quella tangente. E ciò essendosi generalmente indicato, ci risparmia di proporre particolarmente, ne seguenti problemi, siffatta determinazione.

PROPOSIZIONE CVII.

PROBLEMA.

318. Sviluppare una data superficie cilindrica insieme alla curva segnata sulla medesima.

La soluzione di questo problema è sì evidente, che non ha nè meno bisogno di figura. Imperocchè dalla stessa definizione del cilindro retto risulta, che la superficie di esso sviluppisi in un rettangolo indefinito la cui base sia quanto la retta uguale al perimetro della curva direttrice di quella superficie. Se dunque la superficie proposta suppongasi retta al piano orizzontale, il che può sempre farsi, e che stabilito nella traccia orizzontale un punto si vadano da esso prendendo successivamente delle particelle sul perimetro di tal traccia, le quali si trasportino l' una dopo l' altra sopra una retta indefinita, a cominciar da un punto di essa da corrispondere a quel primo preso sulla traccia; allorchè, percorso l' intero perimetro di questa, si sarà di nuovo pervenuto al primo punto, si sarà ottenuta la sua lunghezza intera segnata sulla retta indefinita.

In oltre le perpendicolari che da' punti successivi di questa retta le si elevano, nel piano ove trovasi esposta, rappresenteranno i lati della superficie cilindrica corrispondenti a'rispettivi punti della direttrice suddetta; e comechè le parti di que' lati che si arrestano fino alla curva segnata sulla superficie proposta sono quanto le perpendicolari che dalle projezioni verticali di tali punti tiransi alla comune sezione de' piani ortogonali di projezione, ne segue, che prendendo su' lati corrispondenti nello sviluppo le parti uguali alle anzidette perpendicolari, la curva che si condurrà per tutti gli estremi di tali lati così determinati sarà lo sviluppo di quella che era data sulla superficie cilindrica.

319. Scol. Supponendo piana la curva assegnata sulla superficie cilindrica, e prodottavi per conseguenza dal piano $fF'f'$, [*fig.76.n.1.*] perpendicolare al verticale di projezione, cadrà la projezione verticale della curva segnata sulla superficie cilindrica nella traccia verticale del piano segante, ed essa, nella presente figura, sarà la $c'e'$ che rimane interposta tra le tangenti cC', eE' la traccia orizzontale della superficie cilindrica perpendicolari alla LM. Quindi se esposta la retta indefinita PZ, e stabilito su di essa il punto R corrispondente a c [*fig.76. n.1. e 3.*], si prendano dal punto R, e dall' una parte di esso le RS, ST, TV, VU, UX, XY uguali rispettivamente agli archetti ck, kk', $k'k''$, $k''k'''$ . . . . fino a pervenire al punto e; e lo stesso si faccia dalla parte opposta sulla RZ, portandovi le RQ, QO, *ec.* fino a distendere in retta l'altro ramo di curva che, e poi prendendo sulle perpendicolari indefinite, che da tutt'i punti di questa retta si alzano su di essa, la Rr uguale alla $C'c'$, ed a destra e sinistra di questa le Qq, Ss uguali alla medesima $I'i'$, e così per le altre in seguito, continuando fino a' termini dall' una e l' altra parte; la curva condotta per tutt' i punti r, s, t . . . e per gli altri r, t, o . . . . segnerà sullo sviluppo della superficie cilindrica quella ch' era data su questa . .

Ed una tal costruzione può aver luogo in questo caso, perchè gli estremi de' lati della superficie cilindrica, che passando per h, k si terminano alla curva ch' è nella superficie cilindrica, hanno la stessa projezione verticale i', e quindi la stessa altezza orizzontale, e però anche la stessa altezza sulla PZ. E similmente pe' lati che passano per h', k', *ec.*

Finalmente è pur chiaro, che se la superficie proposta fosse quella del cilindro a base circolare, nel qual caso la sviluppata della circonferenza potrebbe anche assegnarsi graficamente, i due' rami della curva sullo sviluppo, corrispondenti ciascuno alla semiellisse segnata dal piano segante sulla superficie cilindrica sarebbero identici, dall' una e l' altra parte del punto r.

320. Scol. Si tiri da un punto m ad un altro n, presi sullo sviluppo della superficie cilindrica, la retta mn: è chiaro, che questa dovrà intersegare le yY, xX, Uu ..., che rappresentano i lati della superficie cilindrica sullo sviluppo di essa, in uno stesso angolo. Or siccome non cambiansi sullo sviluppo di una superficie cilindrica, nè l' estensione di questa, nè quella di una curva in essa esistente, nè finalmente la posizione rispettiva di tal curva con la generatrice di quella superficie in tutte le posizioni, che tal generatrice ha nel descriverla; è chiaro perciò, che quella curva sulla superficie cilindrica, ch' è dinotata nello sviluppo di questa da una linea retta, dee intersegare tutt' i lati del cilindro sotto lo stesso angolo. Ed al contrario ogni volta, che una curva segnata in una superficie cilindrica fa co' lati di questa lo stesso angolo, cioè ch' essa è un' *elice*, dovrà sullo sviluppo di quella superficie venir espressa da una linea retta.

Ciò posto, poichè la linea retta mn è la più breve di quante possonsene condurre dal punto m all' altro n, e ch' essa dinota una parte di un' elice sviluppata; nè segue anche dal già detto, che la più breve via per andare sopra di una superficie cilindrica da un punto ad un altro sia l' arco dell' elice, che attraversa que' due punti.

E ciò che in ultimo si è detto in questo scolio, potrà di leggieri estendersi alle superficie coniche, ed in generale a tutte le superficie sviluppabili. Val quanto dire che:

Tutte le volte, che un arco di curva segnato in una superficie sviluppabile, distendesi in linea retta, sullo sviluppo della medesima, dovrassi da quello rappresentare la più corta distanza, in su tal superficie curva, tra que' due punti, che n' erano gli estremi.

PROPOSIZIONE CVIII.

PROBLEMA.

321. Sviluppare una superficie conica a base qualunque; e segnare su tale sviluppo una linea curva data in essa.

Si costruisca l'intersezione della proposta superficie conica con un' altra sferica concentrica (*pr. 70. cas. 1.*): è evidente, che tutt'i punti di quest' intersezione essendo equidistanti dal vertice della superficie data, debbano trovarsi sullo sviluppo di essa ad uguali distanze da quel punto, ch' esprime il vertice, ed esser perciò allogati in un arco circolare descritto con un raggio uguale a quello della sfera, e nel quale il centro dinota il vertice della superficie conica nello sviluppo di essa.

Or sia T (*fig.85. n.2.*) il centro di quest' arco indefinito XYR, ed X dinoti un punto preso in esso, e corrispondente all'altro sull'intersezione delle due superficie conica, e cilindrica, ch' e projettato in k, k' (*fig.85*), e dal quale vogliasi incominciare a ridurre su quell' arco circolare questa intersezione. Per ciò eseguire bisogna, che prima essa si privi di una delle sue due curvature, sviluppandola in un piano. Ad ottener questo, si sviluppi quella superficie cilindrica verticale, che ha per traccia la projezione orizzontale di siffatta intersezione, e sulla quale questa esiste, e poi si rapporti sopra questo sviluppo tal curva stessa, ch' era segnata sulla superficie cilindrica, e su quella della sfera, e del cono (*lem. prec.*); perderà così essa una delle due curvature: e tal linea in questo modo disegnata nel piano, sia rappresentata dalla $xyvuz$ [*fig. 85. n. 2, e 3.*]. Ciò posto si ripieghi siffatta curva sull' arco XYR, vale a dire si porti per esempio, l' arco xy, di essa, a parte a parte, da X in Y sull' arco circolare

XYR; il punto Y sarà sulla superficie conica sviluppata: ed allorchè l'intera curva *xyvuz* si sarà ripiegata sulla circolare XYZ, l' intero settore XYZT, rappresenterà lo sviluppo della proposta superficie conica.

Finalmente se in ciascun raggio TY [*fig. 85. n. 2.*] si prenda un punto V, il quale disti dall'altro T, per quanto è distante dal vertice A della superficie conica proposta quel punto della curva d'intersezione in essa segnata, il quale trovasi in quel suo lato, che vien dinotato da TYV sullo sviluppo; la curva che passerà per tutt' i punti V, in simil modo determinati, dinoterà la curva segnata sulla superficie conica rapportata sullo sviluppo della stessa.

322. Scol. Se la superficie conica, che si vuole sviluppare fosse quella di un cono retto a base circolare; in tal caso la curva d' intersezione di essa con la superficie sferica concentrica sarebbe un cerchio parallelo alla sua base. E siccome il raggio di questa sfera può prendersi ad arbitrio; sarà perciò conducente, nel presente caso, di prender per esso il lato stesso del cono; perchè così la curva d'intersezione sarà dinotata dalla base stessa. Ciò posto, se nella circonferenza del cerchio descritto con un raggio TX [*fig.85.n.2*], quanto il lato del cono dato, si prenda l' arco XYZ uguale alla circonferenza della base di esso (*); il settore XYZT dinoterà lo sviluppo della superficie di un tal cono.

(*) Ciò si ottiene con una semplicissima proporzione, che rilevasi dalla prop. 2. lib. I. *Trigon.*

LEMMA I.

323. *Se i diametri di due semicerchi si dividano proporzionalmente; le semiordinate pe' punti delle divisioni divideranno anche proporzionalmente le semicirconferenze.*

Sieno ACB, *acb* [*fig. 106.*] due semicerchi descritti co' diametri AB, *ab*, e questi sieno divisi proporzionalmente in E, *e*. Ed essendo BE : EA : : *be* : *ea*, adoperando le ovvie trasformazioni di proporzione, si avrà AD : DE :: *ad* : *de*, o sia CD : DE :: *cd* : *de*; che perciò i triangoli CDE, *cde* saranno simili (*7.El.VI.*), e quindi l'angolo CDE sarà uguale all'altro *cde*, e 'l rimanente CDA al rimanente *cda*. Ma l'angolo CDA sta all'altro CDB, come l'arco AC all'arco CB (*33.El.VI.*); come pure sta l'angolo *cda* all'angolo *cdb* come l'arco *ca* all'altro *cb*. Adunque starà AC : CB :: *ac* : *cb*.

LEMMA II.

324. *La semiellisse DHB* [*fig.107*], *che vien segnata sulla superficie del semicilindro DAMBC da un piano perpendicolare al rettangolo DABC, condotto per la diagonale DB di esso, divide la semicirconferenza FHG prodotta sulla stessa superficie cilindrica da un piano parallelo alla base, nella medesima proporzione, che il diametro GF di questo divide la semicirconferenza DEA descritta sul lato DA del semicilindro, e nel piano del rettangolo; cioè sta HG : FH :: EA : DE.*

Imperocchè si conduca per K la KL parallela alla DA, per L si ordini nel semicerchio AMB la LM, giungasi la KH, che sarà perpendicolare al piano del rettangolo DABC, perciò parallela alla LM, e quindi uguali gli archi AM, FH.

E poichè AD : DF :: AB : FK, o sia AL; starà anche AED : DE :: BMA : AM (*lem. prec.*), cioè :: FHG : FH.

325. Scol. Dimostrandosi similmente che sia $fh : fhg$, o FHG::DEe : DEA; starà, per equalità, fh: FH :: DEe : DE.

PROPOSIZIONE CIX.

PROBLEMA.

326. Dividere un arco, o pure un angolo dato in data ragione.

Si sviluppi la superficie di un semicilindro retto a base circolare DAMBC [*fig.107, e 108.*] riportando su lo sviluppo la semiellisse DHB segnata in quella superficie cilindrica dal piano per la DB perpendicolare all'altro DABC; e sia un tale sviluppo rappresentato dalla figura *108.*, nella quale sia perciò ab uguale alla semicirconferenza AMB, ad uguale ad AD, e la curva dTQb rappresenti la semiellisse DHB sullo sviluppo della superficie del semicilindro. Or si descriva sulla ad il semicerchio aNd, nel cui centro O si costituisca l'angolo dON quanto il dato P, poi per N si tiri la QNR parallela alla ab, la quale si divida in S nella data ragione di $m : n$, cioè stia QS : SR : $m : n$. Per S conducasi la ST parallela alla ad, e finalmente per lo punto T, ove questa parallela incontra la linea bQTd. si conduca la TXV parallela alla ba, e tal parallela incontri in X la semicirconferenza aXd, congiunta la OX questa dividerà il dato angolo dON nella sagione di $m : n$, cioè starà NX : Xd :: $m : n$,

Imperocchè sta QR : TV, o SR :: Nd : dX (325); e perciò, dividendo, QS : SR, cioè $m : n$ :: NX : Xd, o come l'angolo NOX all'altro XOd.

FINE

DELLA PARTE PRIMA.

NOTE

ALLA TERZA EDIZIONE

DELLA

GEOMETRIA DI SITO

SUL PIANO E NELLO SPAZIO.

Digitized by Google

Digitized by Google

PARTE I.

Alla prefazione (pag. XXX , *e* XXXI.) — All'evidenza, che la stessa denominazione di *luoghi alla superficie* porta seco , ed alle ragioni quivi addotte aggiungnesi ancora l' esposizione di Pappo nella prop. 28. lib. IV. *Collect. Mathem.* al proposito della rettificazione del cerchio ; dicendovi *geometrice per locos , qui ad superficies dicuntur* . Ma su di ciò sarà estesamente ragionato nel vol. I. degli *Opuscoli matematici* , nella dissertazione sulle opere del *Luogo risoluto* degli antichi .

AL LIBRO I.

Alla def. II. (§.3.) — In questa definizione si è usata la frase *oggetto geometrico* , perchè vi fossero compresi anche i *punti* . Euclide nella sua analoga definizione, ch' è la 4. *Datorum* dovè specificarveli , e però fu obbligato a far lo stesso per le *linee*, le *figure*, gli *angoli* . Ma per la nostra definizione dovendo una tale enumerazione esser più lunga , abbiamo prefcrito il modo tenuto , che con una breve espressione comprende tutto ciò , ch' è suscettivo di *sito* . Abbiamo poi adottata , per la chiara idea del *sito* , la coesistenza degli oggetti geometrici in modo assolutamente determinato , dipendente , cioè , dalle loro *distanze* vicendevoli , *inclinazioni* , o altre *relazioni* di essi ; del qual carattere si prevalse lo stesso Euclide.

Devesi però osservare , che nella definizione Euclidea , la nozione di sito vien presa come assoluta, dicendovisi : *I punti, le linee, le figure, e gli angoli diconsi dati di posizione, se tengono sempre lo stesso sito*: valo a dire , se essi tengono sempre , nel piano ove veggonsi segnati , assolutamente quel luogo , che dal proponente viene stabilito , senza potersi variare a volontà di chi risolve il problema , come per le tre altre qualità di dati può farsi. Ma volendo anche una tal caratteristica assoluta del *sito* concederla nel piano , essa non può affatto aver luogo nello spazio ; ed è però , che abbiamo creduto conveniente stabilire , nella nostra definizione, pel *sito* in generale, la nozione relativa di esso.

Alle prop. I, e II. (§§. 7, *ed* 8.) — Euclide dedusse ancor egli dalla definizione del dato di *sito* la prima di queste proposizioni , che nel citato suo libro costituiva la prop. XXVI. ; e per la seconda si contentò farne una definizione (la 6); e ciò consentiva con la definizione assolu-

ta del *sito* da lui data. Il Fergola ne costituì della prima di tali proposizioni un assioma *(Invenz. geom. lib.I.§.69)*. Ma noi, atteso la nostra definizione de' *dati di sito*, ne abbiamo dovuto formare due teoremi.

Alla prop.III.(§.9.) — Questa proposizione corrisponde alla XXV. *Datorum* di Euclide.

Allo scolio generale (§. 26.) — Per una maggior estensione del presente argomento, si potrà riscontrare il cap. V. della parte 1. dell' *Invenzione geometrica*.

Alla prop.XIII, ed al suo scol. 1. (§§.48, e 50). — In questo scolio recasi un principio, ch' è il fondamento della Geometria analitica nello spazio; ed esso derivasi dalla prop.XIII, di cui ne sono due casi lo prop.XI o XII, nelle quali espongonsi i mezzi da rappresentare graficamente il *sito* di un punto nello spazio, su' quali poggia la *Geometria descrittiva*. Ma poichè altri mezzi presentansi per ottener lo stesso scopo, cioè riferendolo ad altri punti di sito, o a rette di sito; però a stabilire quel primo mezzo adottato come lo più semplice, conveniva esibire ancora le costruzioni con questi altri determinanti, il che vedesi eseguito nelle prop.CIII. e CIV. del presente trattato. (Veggasi *anche lo scolio dopo questi*, §.*308*). Ed esse proposizioni, nelle loro analisi geometriche, presentano la compiuta determinazione di tal problema.

Alle prop. XXIV, e XXVI (§§.73, e 78.) — Da queste due proposizioni si ha il lemma da cui dipende la risoluzione della prop. 15 lib. VIII. delle *Collezioni* di Pappo.

Alla prop. XXXIV (§. 92.) — Se combinisi questa proposizione con ciò, ch' è stato detto nello scol. 1. prop. XIII. (§. 50), si rileverà facilmente il modo geometrico da esibire, per mezzo di una proprietà costante di una curva *piana* data nello spazio, l' equazione ad essa; il quale si vedrà poi analogamente estendersi a quelle a *doppia curvatura*, ed alle superficie curve dalla cui intersezione queste risultano, o pure su cui si considerano segnate.

Alla prop. XXXV. (§. 94.) — Euclide, ne' primi sei libri degli Elementi, diede la costituzione geometrica del triangolo con tre delle cinque *parti* indipendenti di esso (così detto da' trigonometri), e dalle quali se ne ha la corrispondente *risoluzione* (Vegg. *la nota al §. 69. Trigon. ediz. 13*). Ma egli non trattò ne' suoi Elementi di *Geometria solida*, che il solo caso della costituzione dell' angolo solido da tre an-

goli piani dati *(23. Elem. XI.)*; poichè di questa sola abbisognava, per la costituzione del parallelepipedo (*27. Elem.XI.*), e per talune dimostrazioni. Quindi è, che pel triangolo sferico non si avesse la geometrica costituzione, che nel solo caso de' tre lati dati, mancando però quella negli altri casi enumerati nella *prop.* 5 lib. IV. *Trigon.*, i quali corrispondono alla costituzione dell' angolo solido triedro, quando gli elementi dati per ottenerlo fossero quelli indicati nella nota alla *prop.*23. *Elem.XI.*, e che verranno recati nelle seguenti proposizioni, in cui ne daremo le geometriche costruzioni rilevandole dalle corrispondenti esibite in questo trattato.

Conviene però premettere per talune di esse il seguente

LEMMA.

Se per gli estremi di due raggi di una sfera posti ad angolo, si tirino i rispettivi piani tangenti essa; questi s' inclineranno in un angolo, ch' è supplimento di quello compreso da que' raggi.

Dim. Imperocchè è chiaro, che se per tali raggi si faccia passare un piano, questo dovrà esser perpendicolare a' due piani tangenti suddetti, e quindi le comuni sezioni di questi con quello dovranno comprendere l' angolo d' inclinazione de' piani tangenti. Che perciò nel quadrilatero che vien costituito da queste comuni sezioni e da' raggi, essendovi due angoli retti, i rimanenti due dovranno essere l' uno supplimento dell' altro.

Cor. 1. Si rileva da ciò, che se i raggi fossero tre, rappresentanti i lati di un angolo solido triedro; in tal caso i tre piani tangenti la superficie sferica negli estremi di questi tre raggi, dovranno comprendere un altro angolo solido, in cui le inclinazioni de' piani degli angoli, che lo comprendono, sono i supplimenti rispettivi degli angoli piani costituenti l' angolo solido, che aveva per lati i tre raggi.

Cor.2. E perchè ogni altro piano perpendicolare all' un de' raggi, in qualunque punto di esso, dee inclinarsi a' piani perpendicolari rispettivamente agli altri due raggi, in quelli stessi angoli in cui s' inclinavano i tre piani tangenti suddetti; perciò si potrà generalmente dire, che:

I tre piani perpendicolari rispettivamente a' tre lati di un angolo solido costituiranno nel loro incontro un altro angolo solido, in cui gli angoli d' inclinazione de' piani de' tre angoli che lo comprendono, sono rispettivamente i supplimenti di quelli dell' angolo solido proposto; che perciò quest' altro angolo solido si dice *supplimentale* di quello.

Cor. 3. E da ciò sarà facile rilevare, che: *Se da un punto preso in*

un angolo solido triedro, si abbassino le perpendicolari su i piani de' tre angoli, che lo comprendono; queste comprenderanno tre angoli, che sono i supplimenti rispettivi di quelli in cui inclinansi i piani dell' angolo solido proposto.

Scol. Quindi, poichè dati i tre angoli d' inclinazioni de' piani di un angolo solido triedro, sono dati per conseguenza anche quelli che comprendono il suo supplimentale; o però sono anche dati gli angoli d' inclinazione de' piani di questo, e conseguentemente quelli del suo supplimento, cioè del proposto; si vede, che la costituzione di quelli angolo solido si ridurrà alla prop.23. libro XI. di Euclide.

Ma ecco in qual modo da' tre angoli piani dati comprendenti un angolo solido possonsi conoscere quelli d' inclinazione de' piani di essi, il che si è precedentemente assunto.

Sieno C'A'B', B'A'D', D'A'C' [*fig. 1. N.*] i tre angoli dati costituenti l'angolo solido in A distesi su di un piano, l' uno accanto all' altro: è, chiaro, che presi ne' lati estremi A'C', A'C' le A'C', A'C' uguali, corrispondenti alla AC nell' angolo solido in A, e tirate da' punti C', C' alle A'B', A'B' le perpendicolari C'E, C'F, prodotto finchè s' incontrino in c (il qual punto sarebbe quello ove la perpendicolare abbassata da C sul piano opposto BAD incontrerebbe un tal piano, come si rileva dal ragionamento fatto nel cas. 2. prop. xxv.); saran date le C'E, C'F, e le Ec, Fc, le quali rette, ne' triangoli rettangoli C'Ec, C'Fc, quando gli angoli C'A'B', C'A'D' rimettansi nel loro vero sito, comprendono gli angoli d' inclinazione de' piani di quelli al piano dell' angolo B'A'D'. Laonde tali angoli risulteranno determinati.

E l' angolo d' inclinazione di que' piani tra loro si potrà facilmente determinare nel seguente modo.

Giungasi la EF, ed abbassate da' punti E, F le perpendicolari EH, FH rispettivamente alle A'C', A'C', destra e sinistra; il triangolo costituito dalle tre rette EF, EH, FH darà, nell' angolo opposto alla EF, quello che si cerca.

Problema 1.

Costituire l' angolo solido co' tre angoli dati, che debbono comprenderlo.

È questo il problema risoluto da Euclide nella prop. 23. Elem. XI, ed esso corrisponde alla costituzione geometrica del triangolo sferico sopra la superficie di una sfera, dati i suoi tre lati; od ancora alla risoluzione trigonometrica del medesimo nel caso 1. *prop.* 3. lib. IV. *Trigon.* Imperocchè i tre angoli del triangolo sferico risultano determinati dal lemma precedente.

Scol. E per mezzo del lemma stesso, o di ciò ch' è stato indicato nello scolio, rimane risoluto l' altro problema di : *Costituire l' angolo solido, date le inclinazioni rispettive de' tre piani degli angoli, che debbono comprenderlo ;* ch' è il caso 2. della prop. citata.

Problema II.

Costituire l' angolo solido con due angoli dati de' tre, che debbon comprenderlo, e l' inclinazione de' loro piani.

Sol. Nel lato comune AB degli angoli piani dati BAC, BAD [*fig.2.N.*] costituenti l' angolo solido in A, prendasi la AB di quella grandezza che si voglia, alla quale tirinsi ne' piani di quegli angoli rispettivamente le perpendicolari BD, BC : esse risulteranno date, e comprenderanno il dato angolo d' inclinazione CBD ; e però, costituito con questi dati il triangolo CBD, risulterà data la CD. Ed il triangolo CAD, avendo dati i tre lati, sarà pur dato l' angolo CAD. Laonde il proposto problema sarà ridotto al precedente.

Scol. 1. Un tal problema corrisponde al caso 3. *prop.* v. lib. IV. *Trigon.* E le rimanenti due inclinazioni de' piani degli angoli dati al piano del terzo angolo si costruiranno geometricamente come nella prop. XXVI. (§. 78).

Scol. 2. E da esso, per mezzo del lemma precedente, risulta anche risoluto il problema di : *Costituire l' angolo solido, dato un solo de' tre angoli piani, che il comprendono, e le inclinazioni al piano di esso de' piani de' due altri angoli.* Che corrisponde al cas. 4. della prop. v. lib. IV. *Trigon.* E la costruzione geometrica di questo caso si ha dalla prop. XXV. (§. 77.).

Problema III.

Costituire l' angolo solido, dati due de' tre angoli piani che il debbono comprendere, e l' inclinazione del piano dell' un di essi a quello del terzo.

Sol. Sieno BAD, BAC [*fig. 3. N.*] gli angoli dati, e sia pur data l' inclinazione del piano dell' angolo BAD a quello del terzo angolo DAC.

Dal punto B preso nel lato AB si tirino alle AD, AC le perpendicolari BF, BC, che risulteranno date, e la BE perpendicolare al piano DAC. Giungansi le EF, EC. Sarà l' angolo BFE quello d' inclinazione del piano BAD al piano DAC ; e la EC risulterà perpendicolare alla AC.

Or nel triangolo BEF rettangolo in E, essendo dato l' angolo in F,

e la BF, sarà data la BE, e la EF; e però il punto F. E nell' altro triangolo BCA rettangolo in C, essendo dato l' angolo BAC, e la BC, sarà pur data la AC. Quindi se dal centro A, con l' intervallo AC, descrivasi il cerchio GCH, al quale dal punto E tirisi la tangente EC, il contatto C determinerà il terzo angolo DAC; ed il presente problema sarà ancora ridotto al 1°.

Scol. 1. Questo problema corrisponde al caso 5. prop. v. lib. IV. *Trigon.* E vedesi anche geometricamente risoluto nel §. 79.

Scol. 2. E da esso, per mezzo del lemma risulta ancor risoluto il problema di: *Costituire l'angolo solido con due inclinazioni date de' tre piani degli angoli, che debbono comprenderlo, e l'un di questi angoli opposti a quelle due inclinazioni,* ch' è il caso 6 di quella proposizione.

Alla prop. XXXIX. (§. 101.) — Nel caso di piani ortogonali, la projezione orizzontale del punto *a* cadrà in A', e la costruzione si renderà più agevole.

Alla prop. XI. (§. 103). — Il problema, che qui propónesi a risolvere è lo stesso della prop. 23. Elem. I.; se non che in questo il piano della retta data è dato da se medesimo, mentre nella proposizione presente è dato pe' suoi determinanti. E questa soluzione paragonata con quella può rischiarare la differenza tra l' un genere di costruzioni, e l' altro.

Alla prop. XLV. (§. 112.) — Il sommo analista Lagrange, per un esempio dell' applicazione del metodo de' *massimi*, e *minimi* alle funzioni di più variabili, abbozzò con tal mezzo la soluzione del problema della *minima distanza di due rette nello spazio* (*Traité des fonctions analyt.* §. *168*). Ed egli così conchiude: » Comme les équations en *x* et » *y* sont linéaires, la determination de ces quantités n'a aucune difficulté; « nous ne nous y arrêterons pas, d' autant que ce probleme et susceptible d' une solution géométrique fort élégante. « Né tampoco può pure a questa compararsi la soluzione algebrica, che ne recarono posteriormente i distinti analisti francesi Monge, ed Hachette (*Applic. de Algèbre a la Géomét.* §§. 30 a 33.), e nè pur quelle, che da altri ne sono state posteriormente date, non ostante la preparazione geometrica, che si è premessa all' analisi algebrica, e dalla quale con poco altro si sarebbe pervenuto alla compiuta soluzione del problema. Ed anche dopo tutti gli sforzi dell' Analisi algebrica, la soluzione si rimane limitata ad equazioni, e valori di non facile costruzione, mentre la soluzione geometrica offre facilmente la grandezza, e posizione del quesito

di un problema puramente di sito. Serva ciò di avvertimento in adoperare per ciascun problema quel metodo che l'è proprio, senza predilezione, nè ostinazione; di che ne ha dato un chiaro argomento la conchiusione del Lagrange di sopra recata, con la quale volle indicare aver egli abbozzata quella soluzione solamente per dimostrare l'uso di quel metodo, e non già perchè la credesse propria pel problema, rimettendo per questa alla soluzione geometrica. Cessino dunque, una volta le più che superflue dispute di prevalenza di metodi, e si rivolga ogni cura in ben apprenderli, e coltivarli tutti, e saperne usare opportunamente. Ci dispiace il ritornare spesso a ciò ripetere: ma le circostanze l'esigono; e facciamo voti, perchè non ne avessimo mai più a parlare.

Al cap. VI. — La maniera come vedesi qui trattata la genesi delle superficie curve, che sembraci nuova, è la più generale, che potesse convenire al presente argomento. Nè tampoco sembraci che altri avesse trattata la teorica de' determinanti per esse, com'era conveniente fare, per compiere la dottrina *de' siti* appena abbozzata da Euclide nel suo libro *Datorum*.

Alla def. XII. (§. 118). — Dalla genesi qui assegnata per le superficie curve non rimane escluso nè meno il *piano*; il quale può concepirsi generato da una retta che scorra lungo un'altra, passando sempre per un punto dato, o serbandosi sempre parallela ad un'altra retta di *sito*. La prima delle quali genesi è uniforme a quella delle superficie coniche, l'altra alle cilindriche.

Alle def. XVIII., XIX., e XX. (§§. 141, 148, 150). — La semplicissima, e natural definizione data del piano tangente una superficie curva è analoga a quella, che per la retta tangente una linea curva stabilirono gli antichi geometri, e da' moderni ancora comunemente adottata. Da essa derivasi pure facilmente, e con chiarezza quella pel contatto delle superficie curve tra loro, e della normale in un punto qualunque di queste. E le soluzioni de' problemi de' piani tangenti le superficie curve, e de' contatti tra esse, che recansi nel presente capitolo, e ne' due seguenti si veggono derivare chiaramente dalle definizioni date, e però rendersi facili, ed eleganti.

Al lemma I. problemat. (§. 169.) — Di questo elementarissimo problema, che abbiamo qui dovuto riportare come lemma, e la cui

soluzione poteva anche ben rilevarsi dalla prop. 118. lib. VII. *Collect. Math.* di Pappo, fa maraviglia come il Clavio, seguendo il Cardano, abbia potuto farne tanto caso, e tanti casi, senza mai giugnere a vederne la soluzione generale, ch' è quella da noi esibita, e dalla quale deducesi immediatamente, che: *la tangente comune a due cerchi divide la congiungente de' loro centri nella ragione de' raggi*; e più generalmente *lo stesso per una retta la quale tronchi da due cerchi due porzioni simili*. Ed è pure rimarchevole, che il dotto analista Lacroix, mentre ne reca, nella sua *Geometria descrittiva*, la soluzione esposta dal Clavio, l' abbia ripetutamente data ad un tempo, e come semplicissima, e come d'incognito autore.

Al lemma 2. (§. 173.) — Un tal teorema potrebbe anche enunciarsi nel seguente modo: *Se in ciascuna delle congiungenti i centri di tre cerchi, considerati a due per volta, si assegnino i punti ove quella rimane divisa nella ragione de' raggi rispettivi; ogni tre di tali punti, comunque presi, saranno allogati in una retta di sito.*

Allorchè nel 1801 mi capitò casualmente alle mani la *Geometria descrittiva* del Monge (poichè a quell' epoca era per noi assolutamente interrotta ogni corrispondenza con la Francia), e che m' invogliai a compilarne ancor io gli *Elementi*, sul piano stesso dell' illustre geometra francese, rimasi sorpreso dal vedere, che costui deducesse la verità del presente lemma, con ordine inverso, dalle considerazioni de' piani tangenti tre sfere (*Géomét. descript.* §§. *42 a 44*); e volendo dimostrarla nel modo conveniente, mi si presentò subito quella dimostrazione che or si vede, e che parmi preferibile a quante altre ne ho poi incontrate in diverse opere, e tra queste ancor quella recatavi dal celebre discepolo dell' Eulero Nicola Fuss, nella *Memoria*, che col titolo di *Démonstration de quelques théorémes de Géométrie* trovasi inserita nel vol. XIV. de'*nuovi Atti* di Pietroburgo, per gli anni 1797, e 1798, pubblicato nel 1805, e pervenuto alla nostra R. Biblioteca da pochi anni fa. E conviene osservare, che l' autore s' introduce alla sua *Memoria*, con dire: » Il y a dejà plusieurs années, qu' un jeune fran» çois employé alors au corps imperial des cadets de terre, me parlà » d' un théoréme de Géométrie qui, dans le temps, qu' il étoit enco» re a Paris a l' École Royale militaire, avoit eu quelque célébrité, » et qu' on avoit prétendu tenir du feu M. d' Alembert. Je lui en don» nai une démonstration, dont j' ai trouvé depuis peu le brouillon en » feuillant me papiérs. En relisant cette démonstration j' ai vu, que la » belle proprieté qu'en fait le sujet, peut conduire a d' autres non moins » remarquables. En rassemblant mes idées sur cette matiere il en est

» resulté le petit Mémoire que j'ai l'honneur de présonter ici à l'Aca-
» demie, pour la Collection des Mémoires traduits en Russe, qu'elle se
« propose de publier, ou bien pour les Actes mêmes, si Elle le juge
» digne de cet honneur. Il y fera sans donte plaisir à plus d'un ama-
» teur de la Géométrie, et peut être même à quelquo géométre de pro-
« fession «. Ma non so comprendere, che questo teorema potesso venir tanto agitato nella scuola di Parigi, cho fosse stato rilevato dal d'Alembert, che si stentasse tanto a dimostrarlo, e che il Monge non avesse affatto conosciuto tutto questo, quando ne recava una dimostrazione assai impropria.

La dimostrazione del Fuss è fondata sul seguente lemma, che: *Se i lati AB, AC, BC [fig. 4. N.] del triangolo ABC si prolunghino in* D, F, E, aicchè sia AD×BE×CF = AF×BD×CE; *i tre punti* D, F, E *dovranno stare per dritto*: ch'egli dimostra partendo da principii trigonometrici. Ed un tal teorema coincide col seguento enunciato in modo più geometrico: *Se da un punto B preso nel lato AD del triangolo ADF s'inclini sull'altro lato AF la retta BCE, in modo che stia* AF : FC :: (AD : DB)(BE : EC); *il punto E dovrà trovarsi nella DF prolungata*, da noi riportato nelle note alla *Geometria di sito* fin dal 1815, ed ivi rilevato nel seguente modo quasi intuitivo:

Si tiri per B la BG parallela alla DF, si avrà AF : FG :: AD :: DB, ed FG : FC :: BE : EC; e però AF : FC :: (AD : DB)(BE : EC).

E poteva ancora una tal verità rilevarsi da Pappo, il quale ne dimostra la conversa, cioè, che: *Se nel prolungamento di un lato DF del triangolo DAF prendasi un punto E, dal quale s'inclini sugli altri due lati del triangolo la ECB; dovrà stare* AF : FC :: (AB : DB)(BE: EC). Veggasi *Collect. Mathem.* lib. VIII. prop. 3. Ed ancora Tolomeo l'aveva dimostrata in principio del cap. 12. lib. I. del suo *Almagesto*.

Ma la dimostrazione del Fuss pel teorema di cui trattasi, oltre all'esser fondata su di un lemma dimostrato trigonometricamente, l'è pur essa condotta, senza bisogno, con principii trigonometrici.

Egli poi estende nel teor. 2. la verità dimostrata pe' cerchi alle sfere; il che ben rilevasi dall'analisi geometrica del problema da noi recato nel §. 174. E poi va producendo queste due verità a quattro o più cerchi disuguali posti in un piano, co' centri ne' vertici degli angoli di un quadrilatero, o di un poligono. Lo stesso per le sfere generate da tali cerchi; nel che vedesi assai più generalmente estesa una tal dottrina, che nol fu dal Monge nel luogo citato. Ma in tutte queste cose potranno benissimo esercitarsi i giovani, non presentando alcuna difficoltà di ricerca, o di dimostrazione.

Il Fuss deduce da quel teorema taluni altri, de' quali non è qui il luo-

go proprio a parlarne, serbando ciò al volume degli *Opuscoli matematici*, ove sarà trattato di proposito de' *Contatti circolari, e sferici.*

Alla prop. LXII, ed allo scol. (§.174 e 175). — Posto il lemma precedente, la soluzione del problema del *piano tangente tre sfere date di grandezze e di sito*, sì geometrica, che descrittiva diviene facilissima, ed assai elegante; e facilmente se ne distinguono i varii modi di ottenerla, come vedesi nello scolio.

Al lemma 3. ed alla prop. LXIII. e scol. (§§. 176 a 180.) — Tanto il lemma, quanto il probloma, per la cui soluzione è premesso, e che n' è un semplice corollario, sono nuovi ne' trattati di *Geometria descrittiva*; e vi doveva questo aver luogo, per l' argomento del presente capitolo.

Cade qui in acconcio dimostrare il seguente

Teorema.

La linea di contatto di una superficie di rivoluzione generata da una curva conica, col cono di un dato vertice circoscrittole, è sempre una curva piana, e però una curva conica.

Dim. Suppongasi la superficie proposta generata dall'ellisse ADB [*fig. 5.*] rivolta intorno l' asse AB, ed il cono circoscrittole abbia per vertice il punto P, che congiungasi col centro O dell'ellisse: il piano condotto per le PO, AB segnerà nella superficie conica circoscritta i lati PD, PF tangenti quella in D, F, e la congiunta DF dovrà risultar parallela alla tangente l' ellisse in C, e segnare nella OP tal punto E, che stia OP : OC :: OC : OE (§§.135 e 118 *Sez.con. geometr.*). Si concepisca ora passare per la OP un qualunque altro piano, che segnerà sempre nella superficie di rivoluzione un' ellisse C*d*G*f*, e nella superficie conica i lati P*d*, P*f* tangenti quella; sicchè la retta *df* fra contatti dovrà risultare parallela alla tangente l'ellisse C*d*G*f* in C, ed essere OP: OC::OC: OE, cioè passare pel medesimo punto E.

Or siccome tutte le tangenti le ellissi suddette in C debbono cadere nel piano tangente in tal punto la superficie di rivoluzione (§. 144.); così dovranno tutte le rispettive parallele ad esse giacere in un piano, che sarà parallelo a quel piano tangente, e passerà pel punto E; e la curva di contatto, che è quella in cui un tal piano interseca la superficie di rivoluzione sarà quindi una curva piana.

La dimostrazione sarebbe identicamente la stessa nel caso di una conoide iperbolica. E per la conoide parabolica la PO dovrebbe condur-

si parallela all'asse della parabola generatrice, ed il punto E si otterrà col prendere la EC uguale alla CP; poichè ciascuna delle curve prodotte da' piani seganti condotti per la OP è parabola (§§.212, 214).

Cor. 1. Dalla precedente analisi del teorema risultando assegnato, come si è veduto, il piano della curva di contatto, ed il centro E di essa, che com'è chiaro in generale è un'ellisse, si potrà questa facilmente descrivere rappresentandola nel piano. E se ne potranno ancora, considerandola nel sito in cui si ritrova, assegnare le projezioni con un moto continuato.

Cor. 2. Potendosi il cilindro considerare come un cono a lati concorrenti all'infinito, si vede che il teorema abbia luogo anche per la superficie cilindrica circoscritta a quella di rivoluzione generata da una curva conica.

Scol. E si rileverà in appresso (*nella parte II. del pres. trattato*), che lo stesso teorema abbia luogo in generale per le superficie del *second' ordine*.

Alle prop. LXVIII, e LXIX. (§§.179 a 193.) — I problemi trattati negl'indicati §§. dovevano recarsi in questo capitolo, per compierne l'argomento di esso.

Al cap. X. — In questo capitolo abbiamo voluto dare un saggio delle soluzioni eleganti, ed indipendenti l'una dall'altra, che per tutt'i problemi de' *contatti sferici*, ottengonsi, sia geometricamente, sia graficamente, mediante la nuova proprietà del triangolo rilevatavi dal nostro Fergola, e che vedesi esposta nel *lemma 1.* Del quale argomento, come dell'altro analogo de' *contatti circolari*, che pure sullo stesso principio geometrico vedesi tutto fondato, insieme ad altri affini, sarà a disteso trattato nel vol. III. degli *Opuscoli matematici*, come più volte è stato detto.

Alle prop. LXXII. e LXXIII. (§§. 210, e 211.). — Il punto arbitrario a prendersi nella retta di sito potrà esser quello stesso in cui questa incontra il piano orizzontale; il che ne semplifica alquanto la costruzione.

A' teor II., e V. (§§. 217, e 225.) — Le verità qui dimostrate generalmente, come al presente trattato convenivasi, possono ricevere pel caso di due curve *definibili* la seguente geometrica dimostrazione.

La curva direttrice MAN [*fig.6.N.*] di una superficie conica del vertice A sia rapportata all'asse AP, sicchè abbiasi un costante rapporto

tra le coordinate AX, XY a questo. S' intenda pel vertice R del cono, e per l' asse AP tirato il piano, che segherà quello della sezione *man* parallela alla MAN nella retta *ap* parallela ad AP. Or sieno AX, XY le coordinate della curva MAN per un qualunque punto Y di essa; congiunte le RX, RY, queste incontreranno la retta *ap*, e la curva *man* ne' punti x, y tali, che la xy risulterà parallela alla XY; e però dovrà stare XY : xy :: RX : Rx. Ma questa seconda ragione pareggia quella di RX: Rx, e quindi l'altra di AX: ax. Laonde starà XY:xy::AX : ax; e permutando XY : AX : xy : ax; e però la relazione tra le coordinate della curva *man* sarà identica a quella tra le coordinate dall' altra MAN. Quindi tali curve dovranno essere della stessa natura, e simili tra loro, mentre gli elementi proporzionali di esse, corrispondono ad angoli uguali.

Ed è poi evidente esser anche similmente poste.

La dimostrazione pel caso del cilindro si ottiene analogamente, ed è anzi più facile a compiersi.

A teor. IV, e VII. (§§. 224, e 232.) — Le verità rilevate in questi due teoremi si potranno generalmente, ed in modo diretto ottenere nel seguente modo.

Problema I.

Determinare la natura della sezione prodotta da un piano, che seghi comunque una superficie retta cilindrica a base ellittica, ma non già nella direzione de' suoi lati.

Analisi geometrica.

Rappresenti $nrn'r'$ [*fig.7. N.*] la sezione prodotta dal piano segante nella superficie cilindrica ABB'A', di cui ne sia base l'ellisse BPB'P' intorno al centro O, e con gli assi BB', CC'. Per un punto r di quella sezione si concepisca passare il piano $b\,r\,b'r'$ parallelo alla base, che produrrà nella superficie cilindrica l'ellisse $b\,r\,b'r'$ identica alla base (*teor.2*), e questi due piani s' intersegheranno in una retta rr'. Or pel punto medio u di questa retta, o per l'asse OK del cilindro s' intenda passare il piano, che segnerà nella superficie di questo i lati Pp, P'p', nelle ellissi BPB'P', $b\,p\,b'p'$ i diametri uguali e paralleli PP', pp', e nel piano segante proposto la nn', che passerà per u. Sia inoltre OQ il semidiametro dell' ellisse conjugato ad OP, e pel centro O di questa sia tirata la NON' parallela alla nn', che esisterà nel piano testè tirato per l' asse del cilindro. Ciò premesso.

Per le ellissi BPB'P', $bpb'p'$ parallele ed identiche sta

$$ru^2 : pu \times up' :: OQ^2 : ON^2$$

Ed è poi $pu \times up' : nu \times un' :: pu^2 : un^2 :: OP^2 : ON^2$

Adunque si avrà $ru^2 : nu \times un' :: OQ^2 : ON^2$.

E però la sezione $nrn'r'$ sarà un' ellisse, di cui nun' è un diametro, ed il punto medio o di questo il centro, il quale dovrà trovarsi nell' asse OK del cilindro.

Cor. 1. Quindi ogni cilindro scaleno a base ellittica si potrà ridurre a cilindro retto, anche a base ellittica, segandolo con un piano perpendicolare coll' asse. E però la verità dimostrata nel teorema per quel cilindro l' è generale.

Cor. 2. Il piano per le ON, OQ essendo parallelo all' altro $nrn'r'$, dovrà produrre nel cilindro un' ellisse identica all' altra $nrn'r'$.

Scol. Perchè l' ellisse NPN'P' divenisse cerchio è chiaro, che debba esser retto l' angolo QON, e la QO uguale alla ON. Or per la prima di tali condizioni richiedesi che la ON cada nel piano BAA'B' [*fig.8.N.*]; e per la seconda, essendo la ON maggiore della OB, dovrà questa essere il semiasse minore dell' ellisse BCB'C', ed OC sarà in tal caso il maggiore. Laonde il punto N si otterrà descrivendo, nel piano BAA'B' condotto per l' asse OK del cilindro e per l' asse minore della base, il cerchio col raggio OC quanto il semiasse maggiore, il quale segnerà ne' lati AB, A'B' i punti N, N', N'', N''', soddisfacenti al quesito, come fu anche detto nel teorema IV. (§. 224.). E si avranno per tal modo, per ogni punto dell'asse OK, due sezioni circolari uguali, e succontrariamente poste, i cui piani saranno similmente inclinati all' asse del cilindro retto sul quale sono prodotte.

Problema II.

Determinar la sezione prodotta in un cono retto a base ellittica da un piano segante qualunque.

Analisi geometrica.

Sia $nrn'r'$[*fig.9.*] una di tali sezioni, e per un punto r di essa si faccia passare il piano parallelo alla base BPB'P' del cono proposto, che produrrà l' ellisse $brb'r'$ simile e similmente posta alla base suddetta (*teor.*5. §.223.). Sia pp' il diametro di quest' ellisse, che passa pel punto u medio di rr', e s' intenda condotto pel vertice A del cono, e per la pp' il piano, che segnerà nel cono il triangolo per l' asse PAP', il quale s' interseghi con la sezione proposta $nrn'r'$ nella retta nn', che passerà ancor essa pel punto u.

Ciò posto, sia OQ il semidiametro dell' ellisse BPB'P' conjugato ad OP, e per O sia tirata la NON' parallela alla nun', ed essa incontri in N, N' i lati del triangolo PAP'.

Per l' ellisse brb' simile all' altra BQB' sta

$$ru^2 : pu \times up' :: OQ^2 , OP^2$$

ed è poi $$pu \times up' : nu \times un' :: OP^2 : NO \times ON'$$

Adunque sarà $$ru^2 : nu \times un' :: OQ^2 : NO \times ON'$$

E però la sezione $nrn'r'$ sarà una curva conica, che avrà per centro il punto o medio della nn', e per semidiametro conjugato ad on l' altro oq parallelo ad rr', e quarto proporzionale in ordine alla media proporzionale tra NO ed ON', alla OQ, ed alla on.

Determinazione della sezione.

Una tal sezione conica sarà, com' è noto, ellisse, o iperbole secondo che la ru cada tra i punti n, n', o al di là di essi: e sarà parabola se la nun' incontri un solo lato del triangolo per l' asse PAP', cioè che abbia luogo un solo de' punti d' incontro n, n'. Vale a dire che la sezione sarà ellisse se la nn' incontri i lati del triangolo PAP' entrambi dalla stessa parte del punto A. La ru incontrerà poi la nn' nel suo prolungamento, se mai essa incontri l' un de' lati AP, AP' al di sotto del punto A, l' altro al di sopra, ed in tal caso la sezione sarà iperbole. Finalmente risulterà parabola se la nn' risulti parallela all' un de' lati AP, AP'. Il che consente con le dottrine de' *Conici*.

Cor. 1. Potendosi ogni cono obbliquo a base ellittica ridurre a retto, col far passare pel centro della base un piano perpendicolare all' asse di esso, si vede perciò estendersi la ricerca di sopra recata ad un qualunque cono a base ellittica.

Cor. 2. Risulta inoltre dall' analisi geometrica di sopra recata, che tutt' i centri delle sezioni parallele, e però simili debbano essere allogati nella retta che passa pel vertice, e pel centro dell' una di esse.

Scol. Nel caso delle sezioni ellittiche, la sezione diverrà cerchio se l' angolo NOQ sia retto, ed $NO \times ON' = OQ^2$.

Or per potersi verificare la prima di queste condizioni è necessario che i punti N, N' cadano tra' lati AB, AB' [*fig. 10. N.*] del triangolo per l' asse BB'; poichè in tal caso l' angolo NOC è sempre retto (OC rappresenta il semiasse conjugato ad OB). Inoltre per potersi verificare la seconda condizione è necessario, che sia $OB > OC$; mentre essendo $BO \times OB'$ il minimo di tutt' i rettangoli, che si hanno da' segmenti delle rette condotte per O, e distese fino a' lati AB, AB'; allora potrà inclinarsi la NN' tal che sia $NO \times ON' = OC^2$, quando fosse $OC > OB$. E perchè dal punto O si può tirare un' altra retta uguale ad NN', succon-

trariamente poste ; così in due modi potrà segarsi un cono secondo cerchi ; e questi cerchi saranno uguali, e succontrarii ; e la comune intersezione di ciascun di loro colla base del cono, o col piano parallelo a questa passante pel centro di quella, sarà l' asse maggiore di tal base, o sezione.

Per conseguenza un cono retto a base ellittica può sempre venir segato in due modi diversi, secondo cerchi, che saranno uguali, e succontrariamente posti. E dal cor. 1. rilevasi di poter anche ottener lo stesso pel cono scaleno.

Al §. 252. (Teor. VII.) — La verità del presente teorema risulta dalla possibilità del seguente problema, di cui recheremo la soluzione, anche per le utili considerazioni geometriche alle quali dà luogo.

Problema.

Inclinare tra' lati di un dato angolo una retta, che passi per un punto dato, in modo che i segmenti di essa, tra questo punto ed i lati dell' angolo, comprendano un dato rettangolo.

Soluz. Dal dato punto O [*fig. 11. N.*] si tiri all' un de' lati AB del dato angolo BAB' la perpendicolare OP, e si prolunghi in E, finchè la OE sia terza proporzionale in ordine ad OP ed M (M^2 è il quadrato cui dee essere uguale il rettangolo de' segmenti della retta tirata per O tra' lati AB, AB') ; e sulla OE come diametro descrivasi il cerchio ONE, che incontrando la retta AB' vi segnerà i punti N, N' ciascun de' quali congiunto col punto O, e prodotte le congiungenti NO, N'O fino al lato AB in n, n', i rettangoli N'On, N'On' pareggeranno M^2.

In fatti congiunta la NE, risultando simili i triangoli ENO, OPn si ha EO : ON :: On : OP ; quindi NO$\times$On = EO$\times$OP = M^2, E similmente dal congiungersi EN' si rileverà N'O$\times$On' = M^2.

Si vede che il limite della possibilità di questo problema sia quando il cerchio del diametro OE toccasse solamente la AB'.

Cor. Dalla precedente soluzione ricavasi il seguente

Teorema.

Dato il sito di una retta AB rispetto ad un cerchio ENO di un dato raggio, pel cui centro su tal retta sia tirata la perpendicolare EP, che incontri la circonferenza in E, O; i rettangoli delle parti di ciascuna segante NOn il cerchio, condottavi pel punto O della sua circonferenza, e prodotta fino alla retta AB, saranno tra loro uguali, e ciascuno quanto il rettangolo dato delle parti della segante EOP.

Risulta da questo teorema che non la perpendicolare solamente, ma qualunque inclinata si fosse tirata dal punto O ad un lato del dato angolo avrebbe potuto valere per l' apparecchio alla soluzione del problema. Di fatti, per non tirarla arbitrariamente, supponiamo esser quella che congiunge il punto dato O col vertice A. del dato angolo: prodotta la AO in e fino alla circonferenza del cerchio, e congiunta la Es si vede, che il rettangolo AOs sia quanto EOP, o sia M^2, e l' angolo OEe uguale ad OAP. Quindi se, fatto il rettangolo AOe uguale ad M^2, si descriva sulla Oe il segmento di cerchio OEe capace dell' angolo OAP, ed alterno a questo; si otterranno nella AB' gli stessi punti N, N', che si erano avuti dalla costruzione recata al problema. Ma questa è più elegante.

Scol. Se nella costruzione del problema la terza proporzionale in ordine ad OP ed M si fosse presa dallo stesso verso della OP [*fig.11.N.*], come la OE', e descritto il cerchio del diametro OE', si sarebbero avute le soluzioni del problema corrispondenti alle inflesse dal punto O, negli angoli supplementali B'AB'', BAB''' del proposto. Ed è pur questa la costruzione da praticarsi pel caso identico del punto O dato fuori dell' angolo B'AB.

Alla prop. LXXVI. (§.238.) — La presente considerazione di un piano, che sega una superficie conica, ci porge occasione di quì recare per quelle di second' ordine una nuova proprietà di esse, per le curve di sezione, che potrà riescir feconda di utili conseguenze.

Sia il cono APQV [*fig.12.N.*] segato da un piano, che vi produca la sezione XZY, e questo incontri l' asse AO del cono nel punto N, e l' altro piano, che si tiri pel vertice A parallelo alla base PQV, nella retta RS. Or suppongasi tirata, nel piano della sezione XZY, pel punto N, una qualunque retta XNY, prodotta fino alla RS in G, e giungasi la AG, che sarà la comune sezione del piano per la GXY e pel vertice A, col piano parallelo alla base PQV; e per conseguenza la AG dovrà esser parallela alla comune sezione PQ di tali due piani. E come che la PQ è bisecata in O; le quattro rette AG, AQ, AO, AP, saranno armonicali (*§.77.Sez.con.geom. ed. 10.*). Quindi la GX sarà divisa armonicamente ne' punti Y, N; e però la RS sarà la polare del punto N.

Da che, la polare di un punto per una curva conica risulta assegnabile dalla stessa genesi per sezione. La qual circostanza da nessun' altra rappresentazione di esse curve può ottenersi.

Al Cap. XIII. delle intersezioni delle superficie curve. — Per compimento delle ricerche fatte su quest' oggetto riporteremo quì il se-

guente teorema, del quale, per quanto sappiamo, si è finora desiderata una general dimostrazione.

Teorema.

Se un cono penetrando una superficie di rivoluzione generata da una curva conica vi produca nell' entrare in essa una curva piana; dovrà anche esser piana l' altra curva per cui n' esce.

Dim. Rappresentino AGB, ERF [*fig.13.N.*] le due curve prodotte da una superficie conica nell' entrare ed uscire dalla superficie di rivoluzione ABFE generata da una curva conica, e la prima di quelle curve AGB sia piana; ed essa suppongasi esser la direttrice di un'altra superficie conica circoscritta alla superficie proposta, e ne sia C il vertice. Suppongasi inoltre circoscritto alla stessa superficie un altro cono, che abbia comune il vertice V del cono penetrante; e congiunti per la VC i vertici C, V di questi due coni circoscritti, s' intenda per tal retta passare un piano qualunque. Un tal piano segherà la superficie di rivoluzione in una sezione conica APQB, i due coni circoscritti ne' lati CA, CB; VP, VQ tangenti quella sezione conica, ed il cono penetrante ne' lati VA, VB, che intersegheranno la sezione conica ne' punti E, F comuni ancora all' altra curva ERF.

Ciò posto costituiscasi da' quattro punti A, E, F, B il quadrilatero iscritto completo AEHFBA, e congiungansi ancora i contatti P, Q. Inoltre applichinsi a' punti E, F le tangenti ED, FD. Saranno C, D, i poli de' lati opposti AB, EF (*not. a pr.*15.*parab.n.*III.), ed H, V le intersezioni delle altre due coppie di lati opposti BE, AF, AE, BF: che però i quattro punti C, H, D, V dovranno stare per dritto (*n.*XI, *not.cit.*); e quindi sulla retta VC, che già passava pe' punti V, C. Inoltre essendo PQ la polare del punto V, dovrà essa passare pel punto H; e perciò qualunque sia la posizione del piano condotto per la VC, dovrà sempre la PQ trovarsi nel piano di contatto della superficie, e del cono circoscrittole del vertice V, ossia nel piano polare del punto H: da che risulta, che il punto H rimanga invariato per qualunque posizione del piano condotto per la VC. Ma questa retta è armonicamente divisa ne' punti C, H, D, V (*n.*XII.*not.cit.*), e sono dati di sito i punti C, H, V. Quindi dovrà anche risultar dato nel sito il punto D; e per conseguenza la EF polare di D, a riguardo della sezione conica APQB, dovrà trovarsi sempre in un medesimo piano, comunque varii tal sezione conica, cioè nel piano polare del punto D, a riguardo della superficie di rivoluzione proposta. Ma i punti E, F appartengono alla curva di uscita ERF. Adunque questi, e gli altri di essa esisteranno in

un medesimo piano; e però la curva ERF sarà una curva piana; e quindi una sezione conica.

Cor. Potendosi una superficie cilindrica considerare come una superficie conica i cui lati comprendano nel vertice angoli evanescenti, e però possansi aver come paralleli tra loro, ne segue che la precedente verità si estenda anche alle superficie cilindriche, cioè, che:

Se una superficie cilindrica penetrando una superficie di rivoluzione generata da una curva conica vi produca nell' entrare in essa una curva piana; ne uscirà per un' altra curva anche piana.

Ma se vogliasi a dirittura ordir per questa la dimostrazione basta riflettere, che in questo caso il quadrilatero AEFB diviene a lati paralleli; da che procedendo analogamente alla dimostrazione recata pel cono, si otterrà, con piccole modificazioni, quella pel cilindro.

Scol. Dalla teorica delle superficie di *second' ordine* in generale, che recheremo nella parte II. del presente trattato, si rileverà aver luogo un tal teorema per tutte esse.

Al cap. XV.—Continuando nel sistema da noi adottato di recare nelle *Note* a' *trattati*, ed ancora a' volumi del *Corso geometrico*, le soluzioni di tutti que' problemi, che avevano correlazione con le materie espostevi, affichè da esse, per la via degli esempi, senza de' quali i semplici precetti rimangono sterilissimi, nè può darsene adattati ad ogni circostanza, si formasse l' animo de' giovani all' invenzione geometrica, ed alla semplicità, ed eleganza in essa, recheremo qui le soluzioni pure geometriche di que' problemi, che nel presente capitolo veggonsi costruiti con l' incontro di rette con superficie curve, a solo oggetto di dare un saggio dell' uso di questo mezzo descrittivo per lo scioglimento di alcuni problemi, ove può pure in diversi rincontri riuscire utilissimo. Varrà ciò anche a confermar sempre più la massima le tante volte da noi inculcata, che non debba il geometra, nelle sue ricerche, l' una via prediligere, abbandonar le altre; ma sempre a quella appigliarsi, che meglio al soggetto che tratta si conviene.

Alla prop. XCI. (§.268). — Eccone qui del problema proposto in tal proposizione la seguente

Soluzione geometrica.

Per quella delle rette date AB [*fig.14.N.*] alla quale si vuol tirare la perpendicolare data da un punto dell'altra retta di sito CD, si tiri un piano parallelo a questa. Indi si faccia passare per la CD un piano perpen-

dicolare al poc' anzi tirato, che lo interseghi nella retta *cd*, la quale incontri la AB in G, formandovi un angolo dato. Sia ora EF la retta richiesta, cioè sia E quel punto della CD dal quale tirata alla AB la perpendicolare EF, pareggi questa la data retta M; e per la EF vi passi il piano EeF perpendicolare all'altro *e*GB; sarà retto sì l'angolo EeF, che l'altro *e*FG. Quindi nel triangolo EeF rettangolo in *e*, essendo data l'ipotenusa EF, e 'l cateto E*e*, sarà pur dato l'altro *e*F. Ed il problema sarà ridotto ad applicare nell'angolo dato *e*GB la *e*F di data grandezza, perpendicolare al lato GB.

Scol. Prendendo il piano AB*cd* per orizzontale, e l'altro CD*cd* per verticale di projezione, la presente soluzione si trasmuterà in grafica, e semplicissima.

Alla prop. XCII. (§. 269.) — Il problema qui proposto può ricevere la seguente

Analisi geometrica.

Sieno AB,CD [*fig.15.N.*] le due rette date nello spazio, e nella CD il punto P, d'onde vuole inclinarsi sull'altra la PQ nell'angolo dato DPQ.

Si concepisca passare un piano per la AB e pel punto P, sul quale da un punto H, preso ad arbitrio nella PD, si tiri la perpendicolare H*h*, congiunta la P*h*, che dinoterebbe la projezione della PH sul piano APB, il triangolo rettangolo H*h*P sarà dato di specie, per essere dato l'angolo HP*h* in cui la retta PH di sito s'inclina al piano di sito APB. Inoltre dal punto *h* si tiri alla PQ la perpendicolare *h*R, e s'intenda congiunto il punto H con l'altro R, sarà la HR perpendicolare alla PQ; e quindi il triangolo HPR risulterà ancora dato di specie.

Or pel primo triangolo PH*h* essendo data la ragione di PH a P*h*, sarà data la P*h*; e per l'altro HPR si ha pur data quella di PH a PR, e però è data la PR. Laonde sarà pur dato il cateto R*h*, ed il punto R rimarrà determinato dal tirare dal punto P la tangente PRQ al cerchio descritto col centro *h*, intervallo *h*R.

Alla prop. XCIII. n. I. (§. 270)

Analisi geometrica pel caso 1.

Per l'un de' punti dati A[*fig.16.N.*], e per la retta di sito MN s'intenda condotto il piano, e su questo la perpendicolare B*b* dall'altro punto B. E poichè $AC^2 + CB^2 = N^2$, e $CB^2 = Cb^2 + Bb^2$, sarà $AC^2 + Cb^2 = N^2 - Bb^2 = P^2$, ed il problema sarà ridotto sul piano AMN, e si risolverà come nella noterella (*) a piè della pag. 165.

Analisi geometrica pel caso 2.

Premesso lo stesso apparecchio del caso precedente, risulterà pur data la differenza de' quadrati AC, C*b*; ed il problema si troverà ridotto alla noterella (*) a piè pagina 166.

Pe' numeri II, III, IV. (§§.273 a 276.) — I precedenti problemi ed altri ancora affini, possono immediatamente esser ridotti a' loro corrispondenti nel piano per mezzo della seguente

Analisi geometrica.

Si concepisca per l'un de' punti dati A [*fig. 17.N.*], e per la retta MN passare il piano AMN, e dal punto B tirata la perpendicolare BD alla MN, che sarà data. Quindi dal punto D, e nel piano AMN si elevi alla MN la perpendicolare D*b* uguale alla DB; sarà dato il punto *b* in tal piano, e la congiungente C*b* pareggerà la CB.

E però tutti que' problemi saranno ridotti agli stessi nel piano MAN relativamente alla retta di sito MN, ed a' punti dati A, *b*.

Alla prop. XCIV. (§. *277.*) — Questo problema, come vedesi, l'è un caso particolare di quello della sfera tangente quattro altre sfere, e però avremmo ben potuto tralasciarne la soluzione, rimettendo a quella data nella prop.LXX. per le quattro sfere, appunto come fecimo nella Memoria *de' contatti sferici*, che presentammo all' Accademia delle Scienze di Napoli nel 1809. Ma poichè in questo caso particolare l'analisi geometrica del problema non ha bisogno di quel lemma, abbiamo però stimato recarne a disteso la soluzione, anche perchè la costruzione può semplificarsi, come si vede nello scol. 1. (§. 278.).

Alla prop.XCV.(§.280.) ed a'suoi cor.e scol. (§§.*282, e 286.*)— Un tal problema, com'è chiaro, corrisponde a quello di: *descrivere una sfera tangente quattro piani di sito che s' incontrino*; ed è però l'un di quelli della famiglia de' *contatti sferici*. La soluzione recatane è ancor semplice sì geometricamente considerandola, che graficamente.

Al lemma (§. *281.*) — Il bellissimo teorema riportato in questo lemma fu assunto dal Monge nel costruire il problema di *esibire le projezioni di un punto, date le sue distanze da tre altri punti dati* (*Géométr. descript.* §.*94.*). E bisogna dire ch' egli avesse per evidente quella verità, il che non è; per cui il dotto geometra Carnot s' ingegnò dimostrarla (*Géomét. de posit.n.506.*), ricavando tal dimostrazione dall' in-

tersezione delle tre sfere, che hanno per cerchi generatori i tre proposti; il qual modo non può piacere a' geometri. Ed egli medesimo, che non poteva essere a meno, che ciò non avvertisse, ne adduceva in iscusa di aver preferita tal maniera di dimostrare ad un'altra più diretta, e fatta senza ricorrere alle sfere, perchè quella gli era sembrata più semplice. Ma al certo che la maniera tenuta dal Carnot non è più semplice della dimostrazione quasi intuitiva, che da noi se n'è data. E da una tal verità, dimostrata nel proprio modo da noi tenuto, si vede poi con quanta facilità derivino le altre che dal §.282 al 287 abbiamo recate.

Alla prop. XCVI. (§. *287.*) — La soluzione di questo problema diviene un corollario del teor. I, (§.285.), e però del lemma al §. 281 da cui questo è derivato. Avvertasi ancora, che dall' intersezione delle corde de' tre cerchi intersegantisi si ha la determinazione del problema; poichè esso risulta impossibile nel caso, che il punto di concorso di quelle corde cada al di fuori de' cerchi.

Alla prop. XCVII. (§. *289.*) — Questo problema, che per la parte II. l' è pur un di quelli principali a risolvere sulla piramide triangolare, non vedevasi risoluto da alcun di coloro che hanno trattato questo argomento. La soluzione che ne abbiamo recata sembraci assai elegante, vedendosi facilmente ridotta alla ricerca del punto, con le stesse condizioni, nel piano de' tre dati; da che essa risulta eseguibile non solo graficamente, ma anche nel modo puro geometrico.

Alla prop. XCIX. ed allo scol. (§§.*292 e 293.*), — Si avverta a ciò che si è osservato nello scolio, circa l' impropria soluzione che dal Monge, e da altri geometri si è data a tal problema, ed alla facilità della sua composizione per mezzo del problema risoluto nella parte I. pr. XCVII.

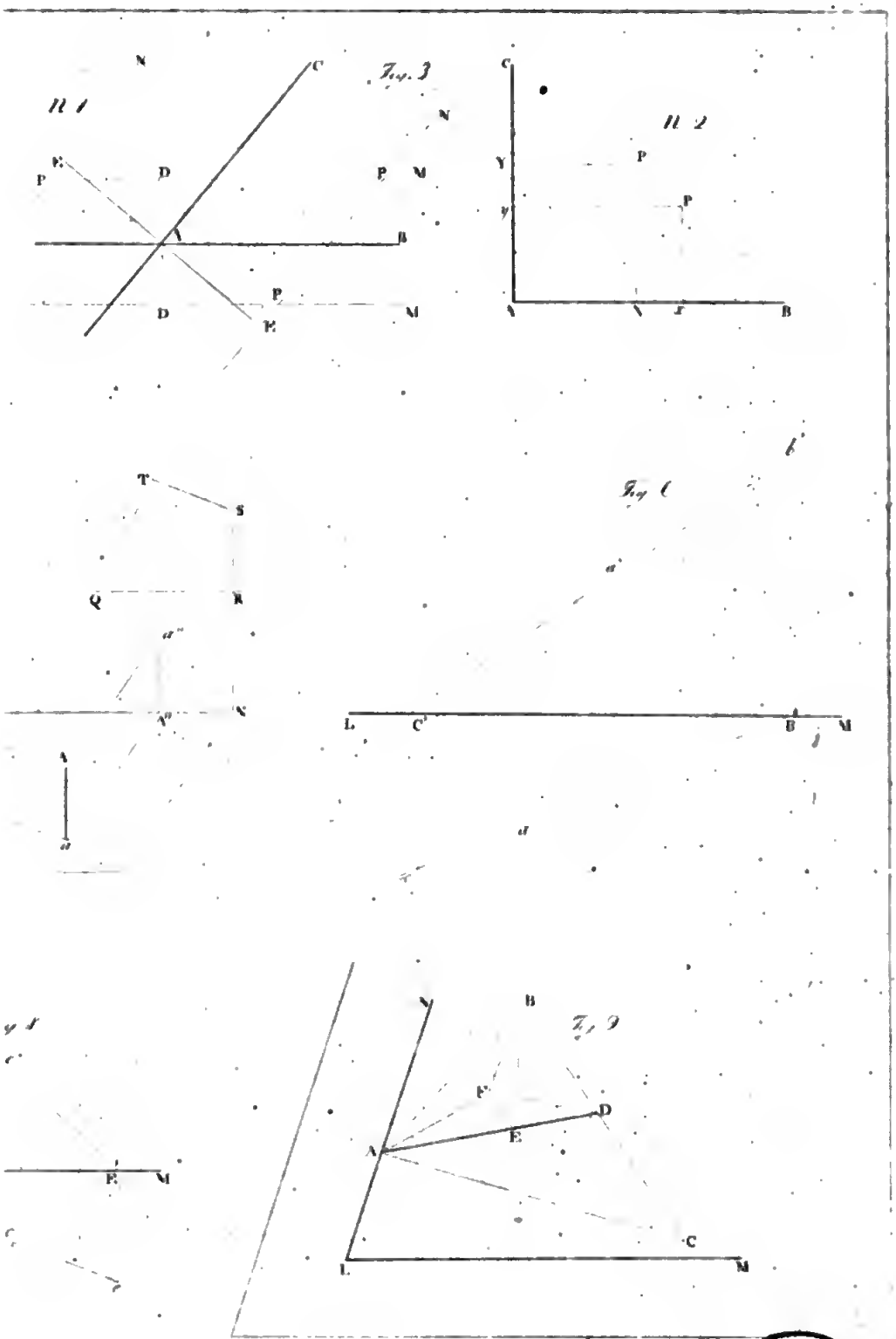
Alla prop. C (§. *294, ed a' §§. dal 295 al 299, che ne fanno seguito.* — Sulla storia delle fasi diverse che ha presentate il problema proposto nel §.294, non abbiamo qui altro da aggiugnere a quello che se ne trova detto nello scol. §. 299. Solamente diremo, che la soluzione dello Scorza, che vedesi nel §. 297 ci sembra superiore in eleganza a tutte quelle che da' geometri antichi ci sono pervenute di problemi solidi; e che nulla può immaginarsi di più ingegnoso, che la riduzione generalissima del prof. Bruno di tal problema, e la soluzione datane, della quale meritamente il valentissimo geometra francese Hachette fece tutto quel conto che meritava, continuandola con un suo dotto lavoro (*Ved. Atti dell' Acc. delle Scienze di Napoli. vol. II.*)

Alla prop. CII. (§. 302.) — Quest' ingegnosa soluzione di un problema sì famoso fin da' primi tempi delle scuole greche, e che è il solo esempio pervenutoci del modo che tenevano gli antichi nel costruire i problemi con le intersezioni delle superficie, e però co' *luoghi* a queste, fa meraviglia come non sia stata recata da Pappo nelle sue *Matematiche collezioni*, mentre egli in ben due luoghi riporta le altre soluzioni di greci geometri, cioè nella prop.5 lib. III. quelle di Eratostene, e di Nicomede, ed ancor l' altra di Erone, sebbene meccanica, e pur quella da lui escogitata; e nella prop.24 del libro IV., ove ritorna sulla soluzione di Nicomede, per darne la dimostrazione da quel geometra tralasciata. Ma ciò che Pappo trasandò venne supplito da Eutocio, il quale, nel suo importante comento al lib.II. di Archimede sulla *sfera*, e *'l cilindro*, soggiugne le soluzioni di quel problema datene da Platone, da Filone bizantino, da Apollonio, da Menecmo, da Eratostene, e quella ancor di Archita, ricavandola da Eudemo.

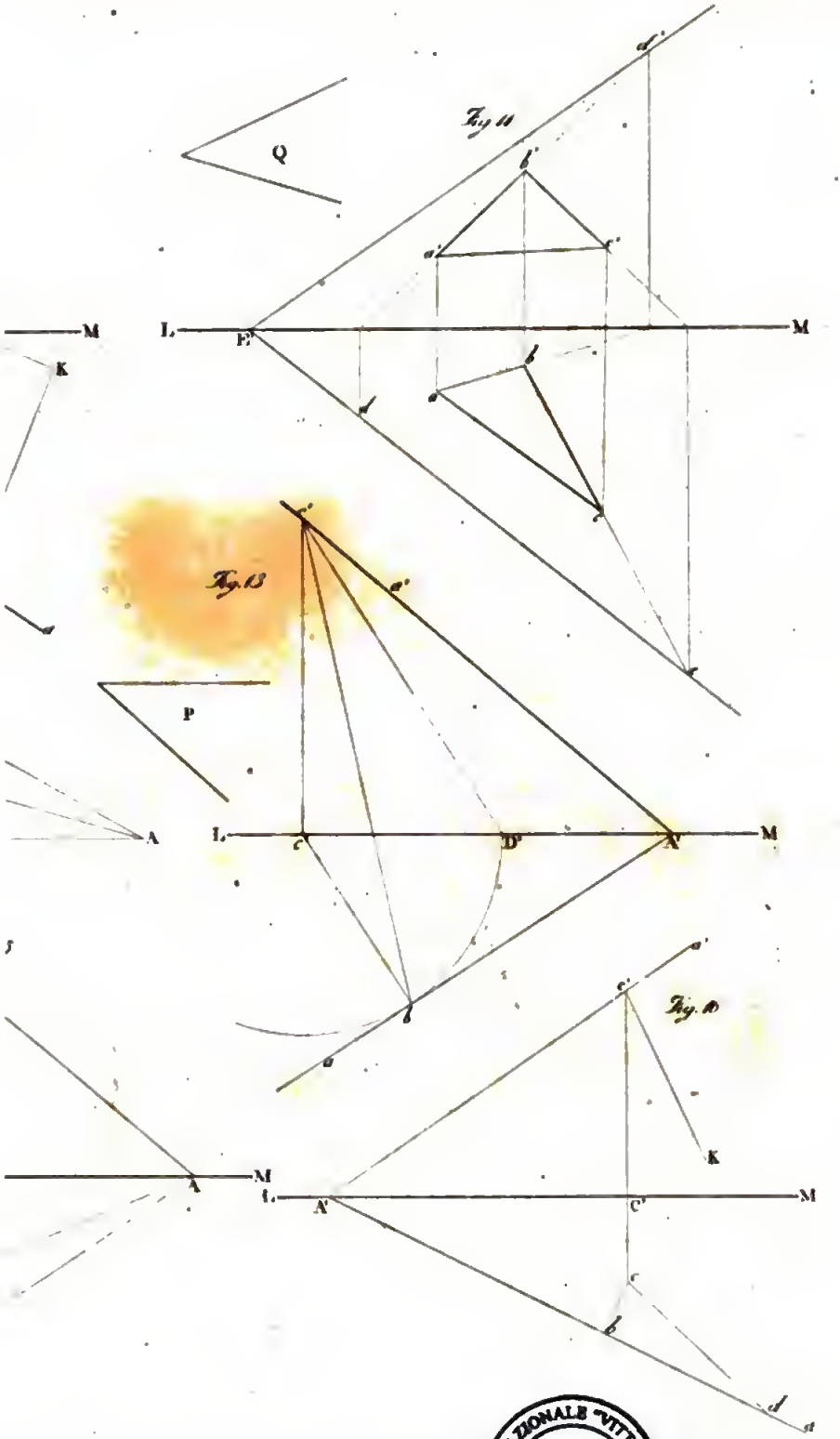
Alle prop.CIII e CIV, ed allo scol. (§§.304 a 308.)—I motivi che ci hanno indotto a trattar questi due problemi, ben si rilevano dallo scolio recato dopo essi.

Alla prop. CIX. ed a' lemmi I, *e* II *che vi sono premessi (§§. 323 a 326)* — Il problema della divisione di un arco circolare in data ragione, l' è il solo esempio di problemi *lineari* che ci rimane dalla scuola greca, serbatoci da Pappo nelle sue *Collect.math.* a prop. 35. lib. IV; per conseguenza del quale poi egli altri ne riporta nelle prop. 36 a 41 Ed essi il costruirono mediante la *quadratrice*, la *spirale Archimedea*, e l' *elice cilindrica*, che eran tra le principali curve da loro escogitate per la riduzione e composizione di quel genere di problemi, assegnandone le proprietà, che dovevano costituire i *luoghi lineari* per essi. Ed i moderni non mancarono dalla lor parte in adoperarsi nella risoluzione di quel problema, per essi di maggiore importanza, dovendo non solo alla Geometria servire, ma ancora alla Meccanica; e tra le diverse soluzioni, che gli uni e gli altri ne presentarono, delle quali sarà a diteso ragionato nella parte II. dell' *Invenzione geometrica*, ci basterà qui accennar solamente quella, che con la combinazione della cicloide Galileana e dell' ellisse ne diedo il Fergola, nell' opuscolo X. di quelli pubblicati nel 1810; o l' altra che, per un saggio dell' uso geometrico dello sviluppo delle superficie curve, è stata da noi recata, per chiusura di questo argomento, e della part.I. della *Geometria di sito*.

SBN C08005

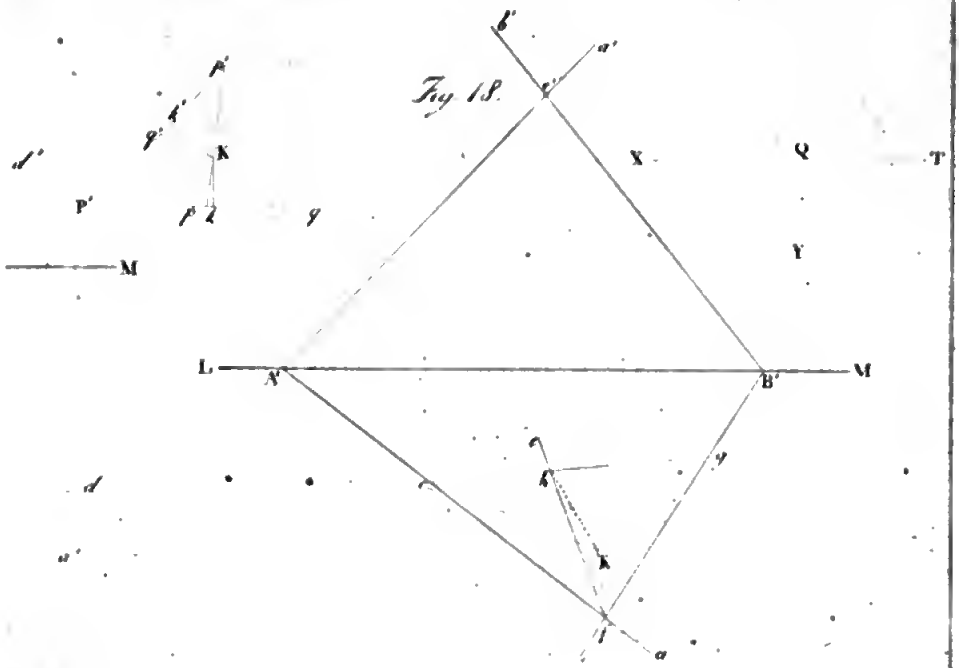


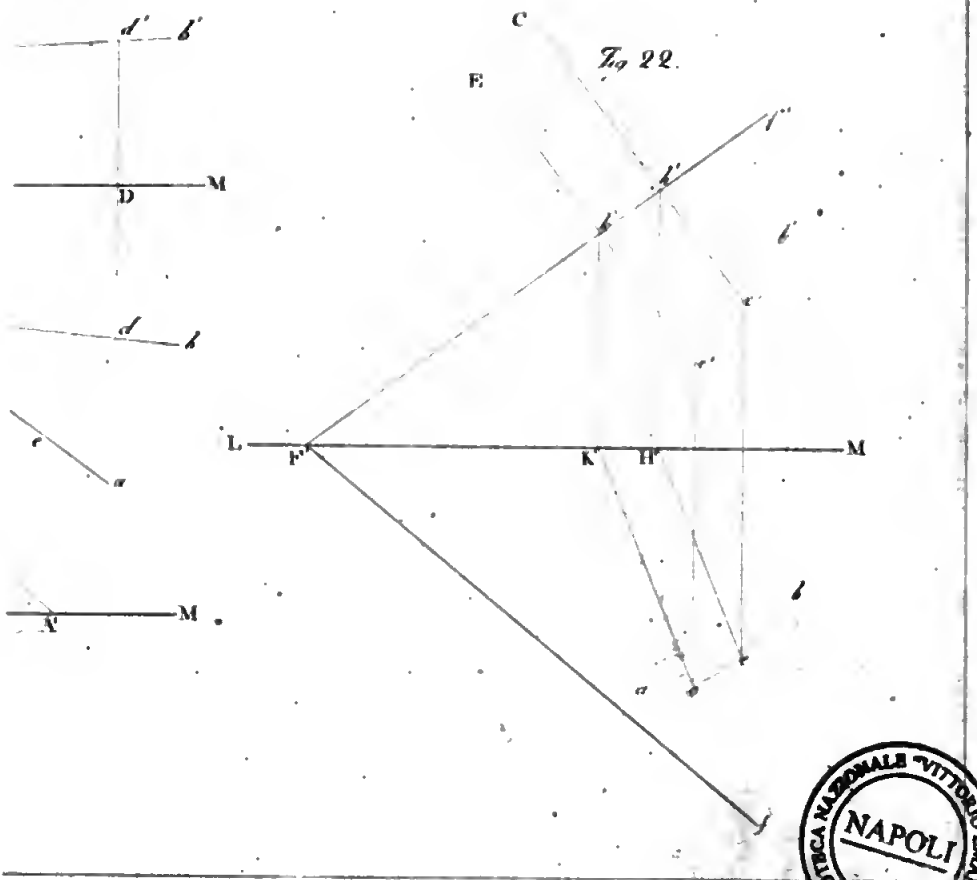
BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google





BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Fig. 25

Fig. 27

Fig. 29

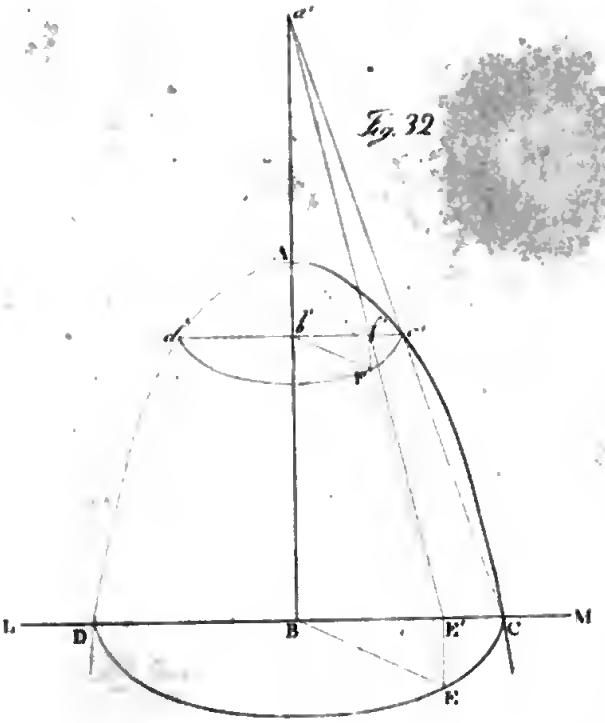
BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 31

Fig. 32



34

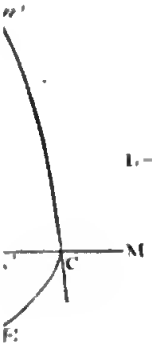
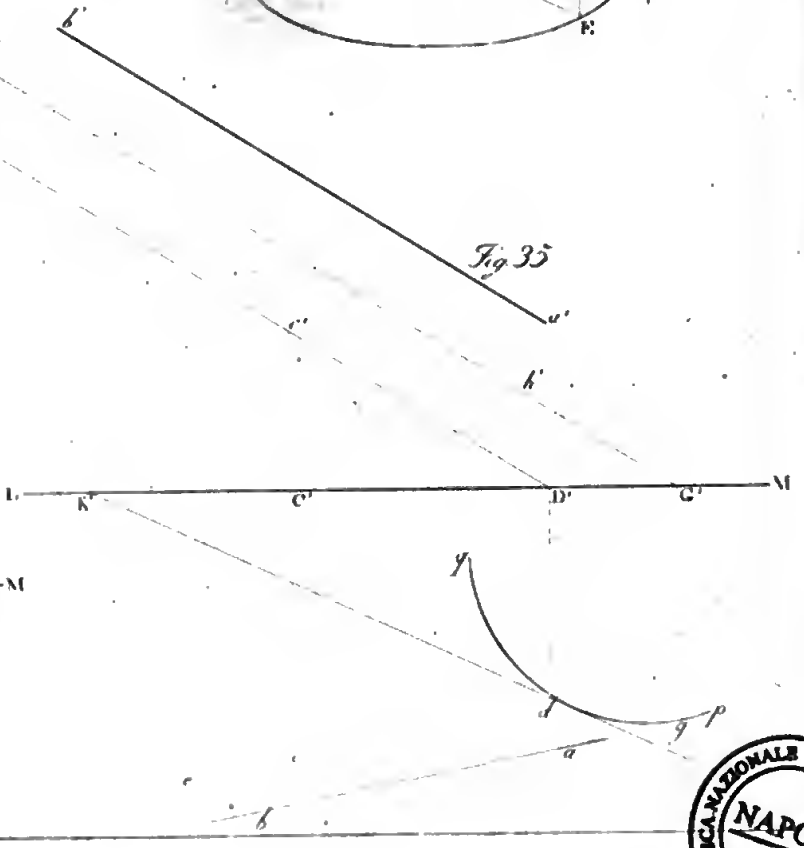
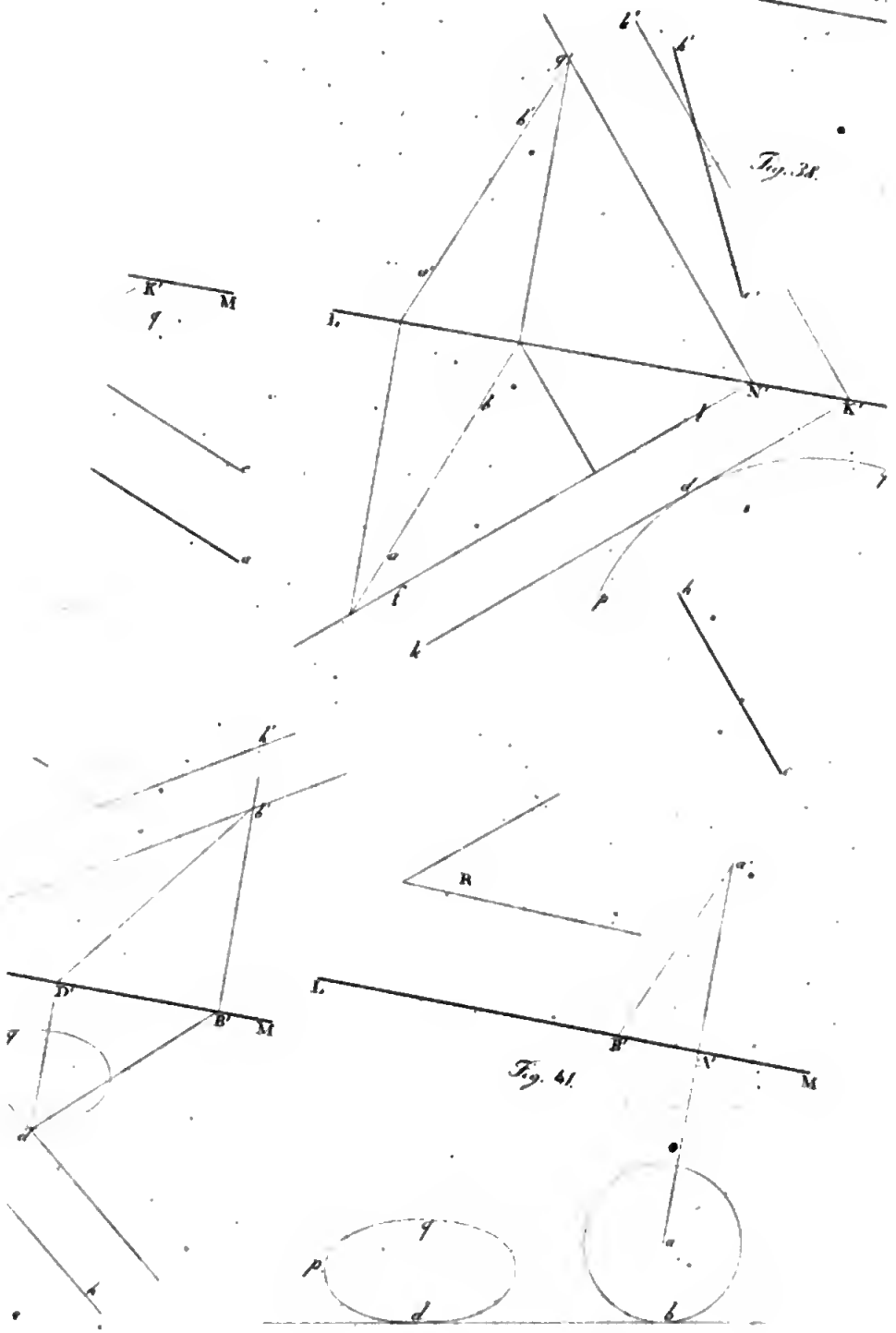


Fig. 35

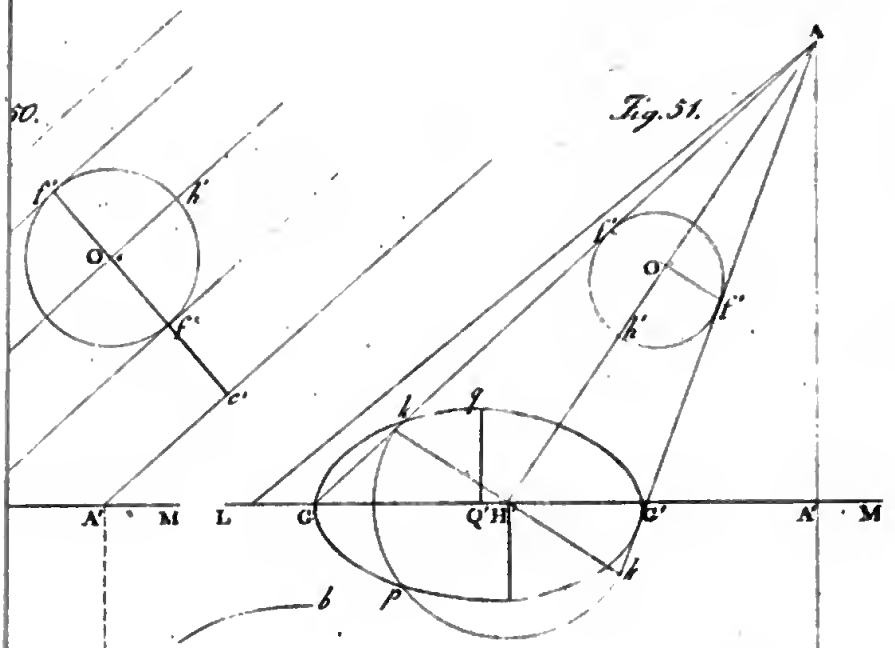


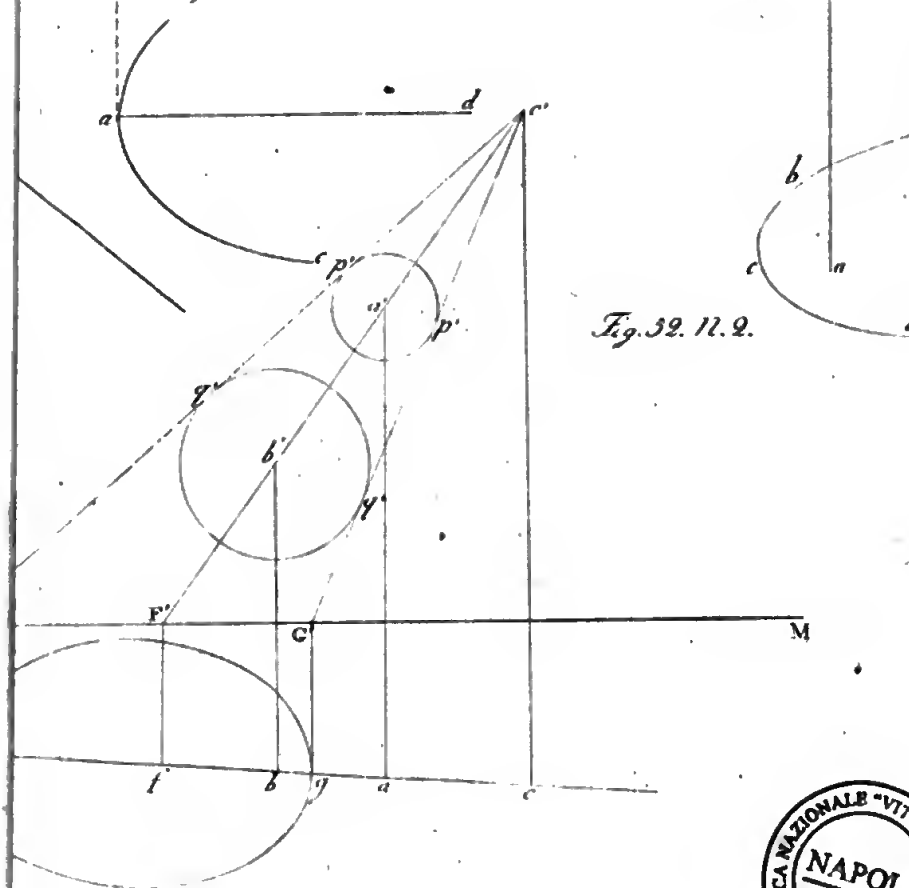
BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

Digitized by Google



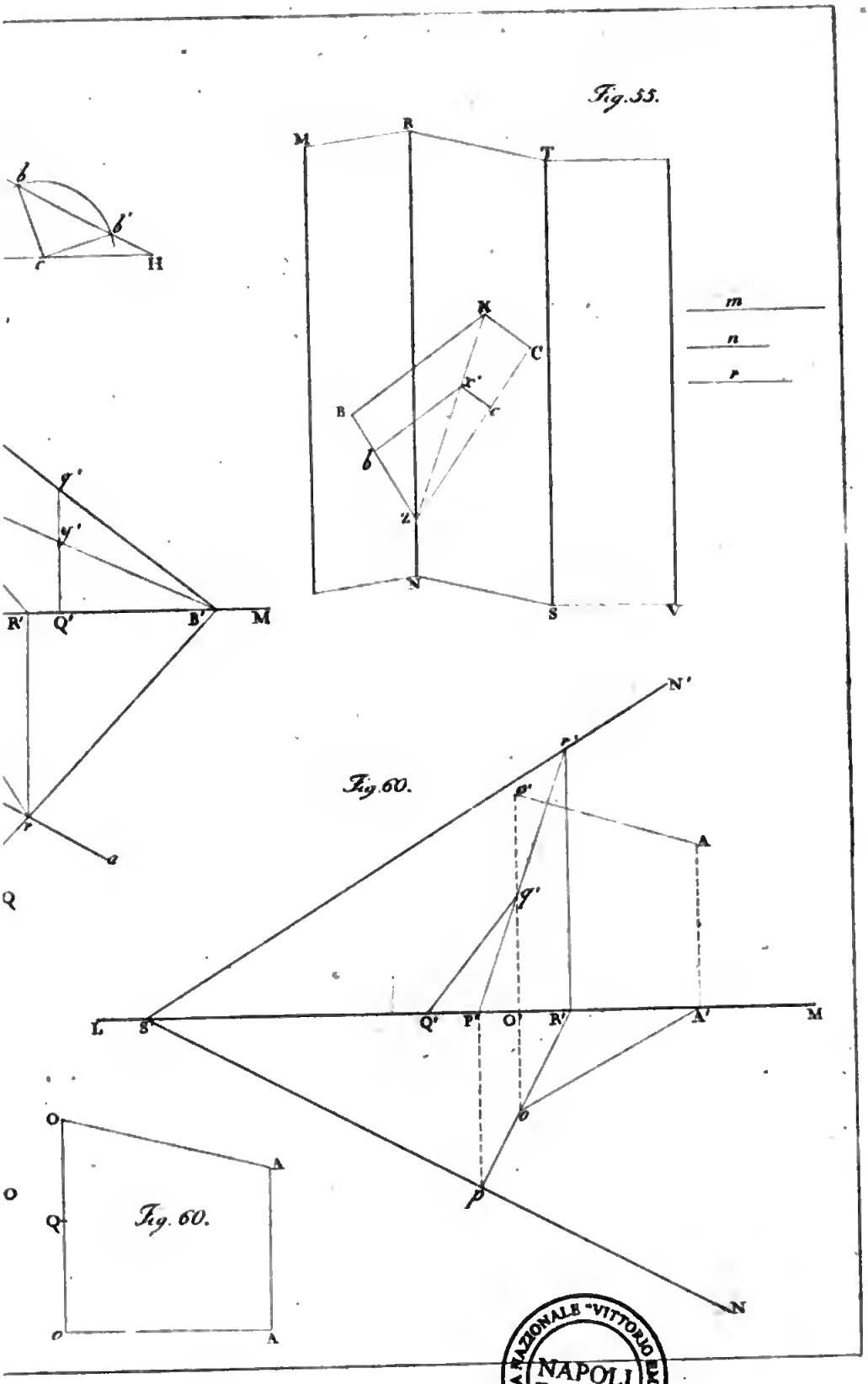
BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI





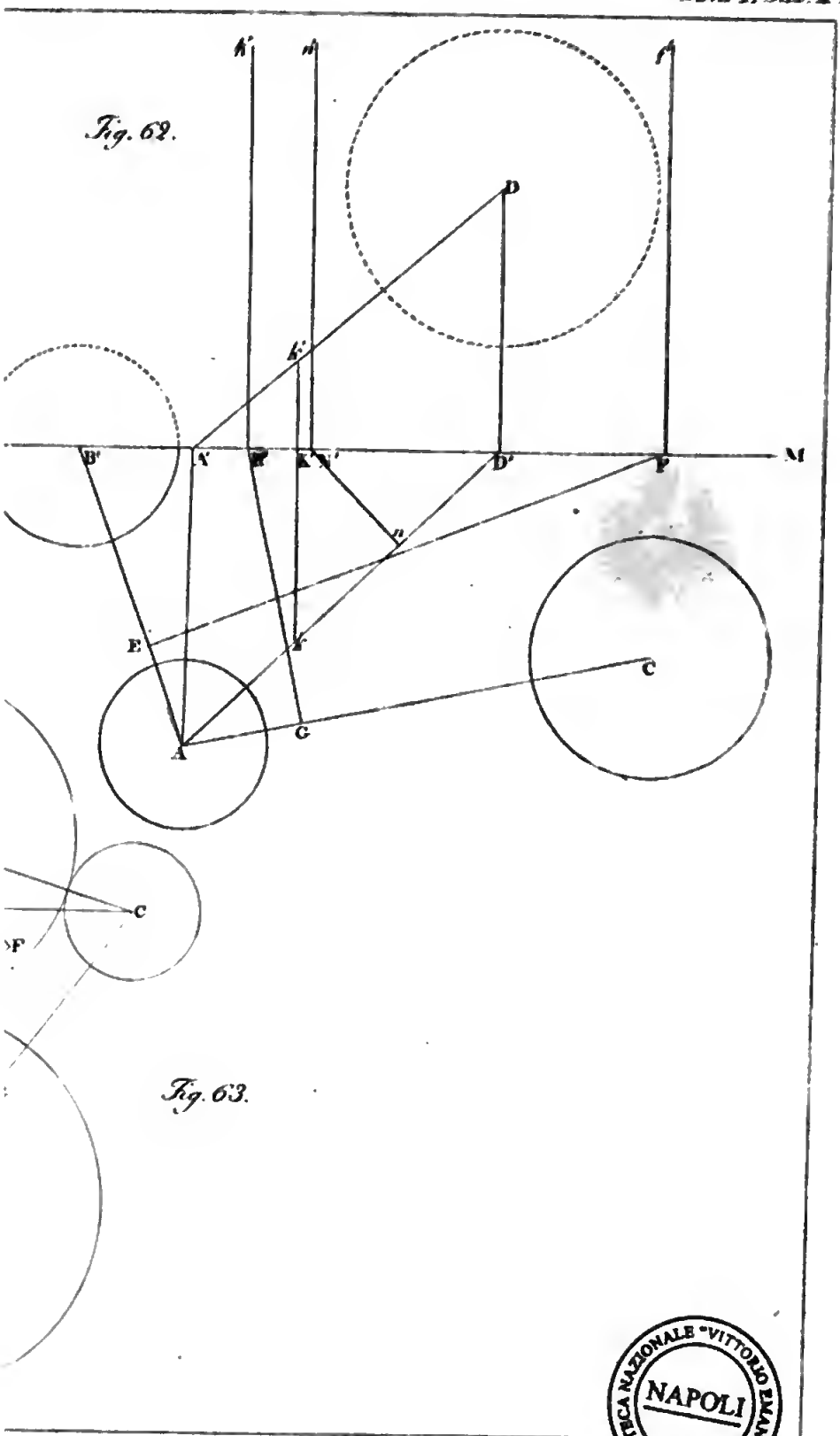
BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

Fig. 67.

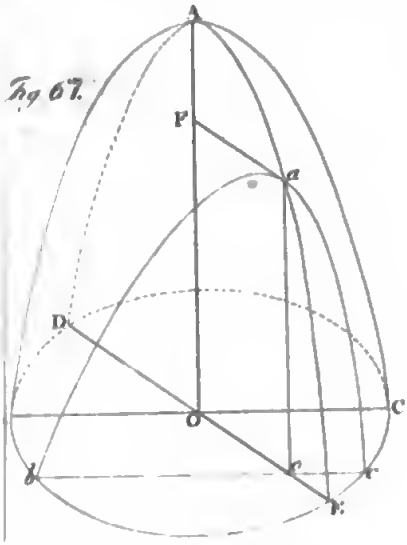
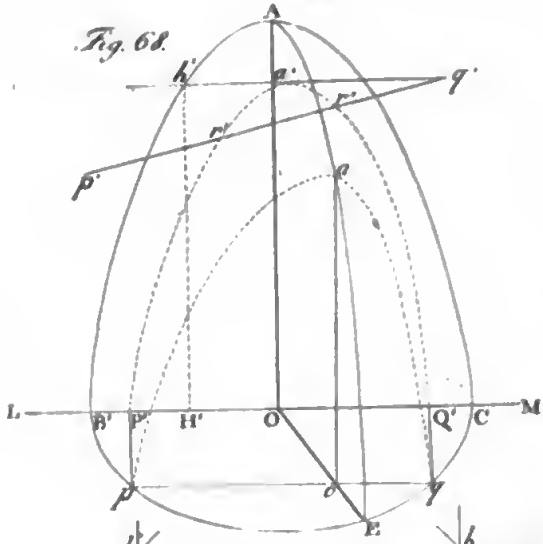


Fig. 68.



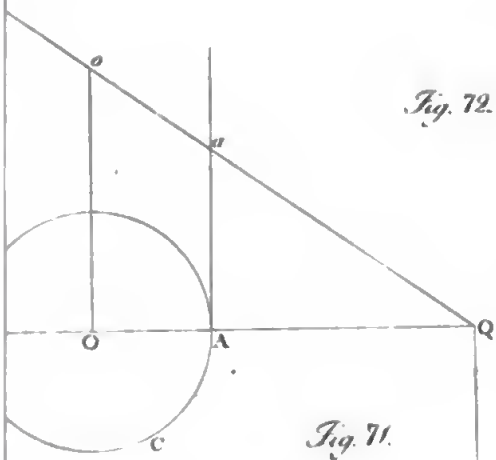
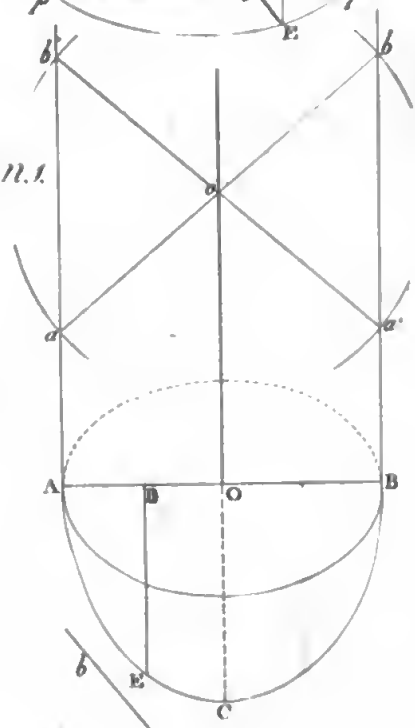


Fig. 71.

Fig. 72. N. 1.



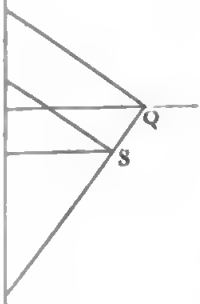
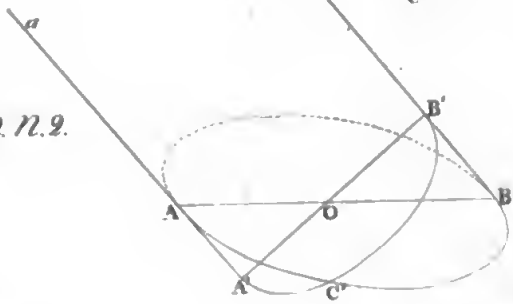
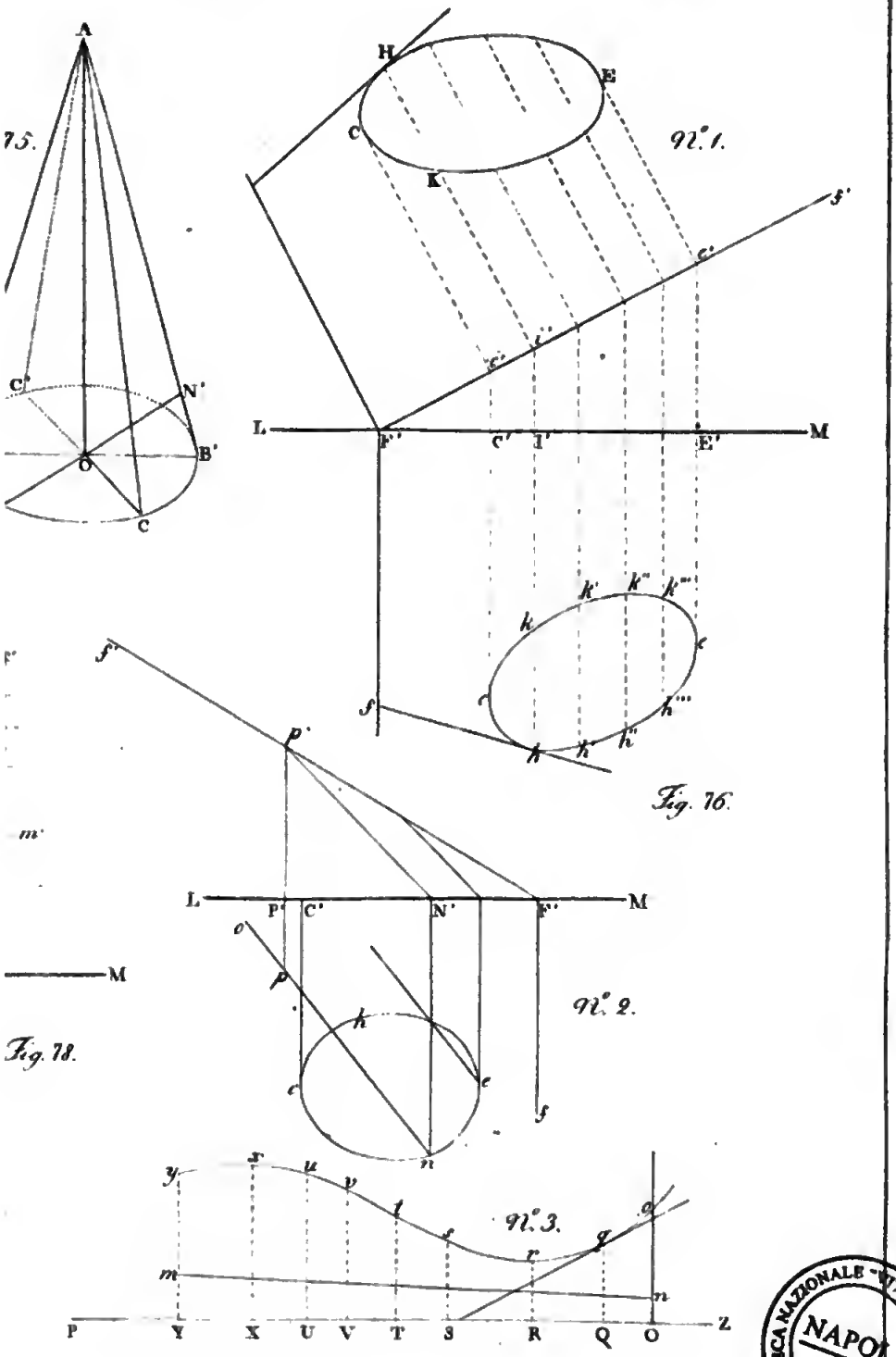


Fig. 72. N. 2.

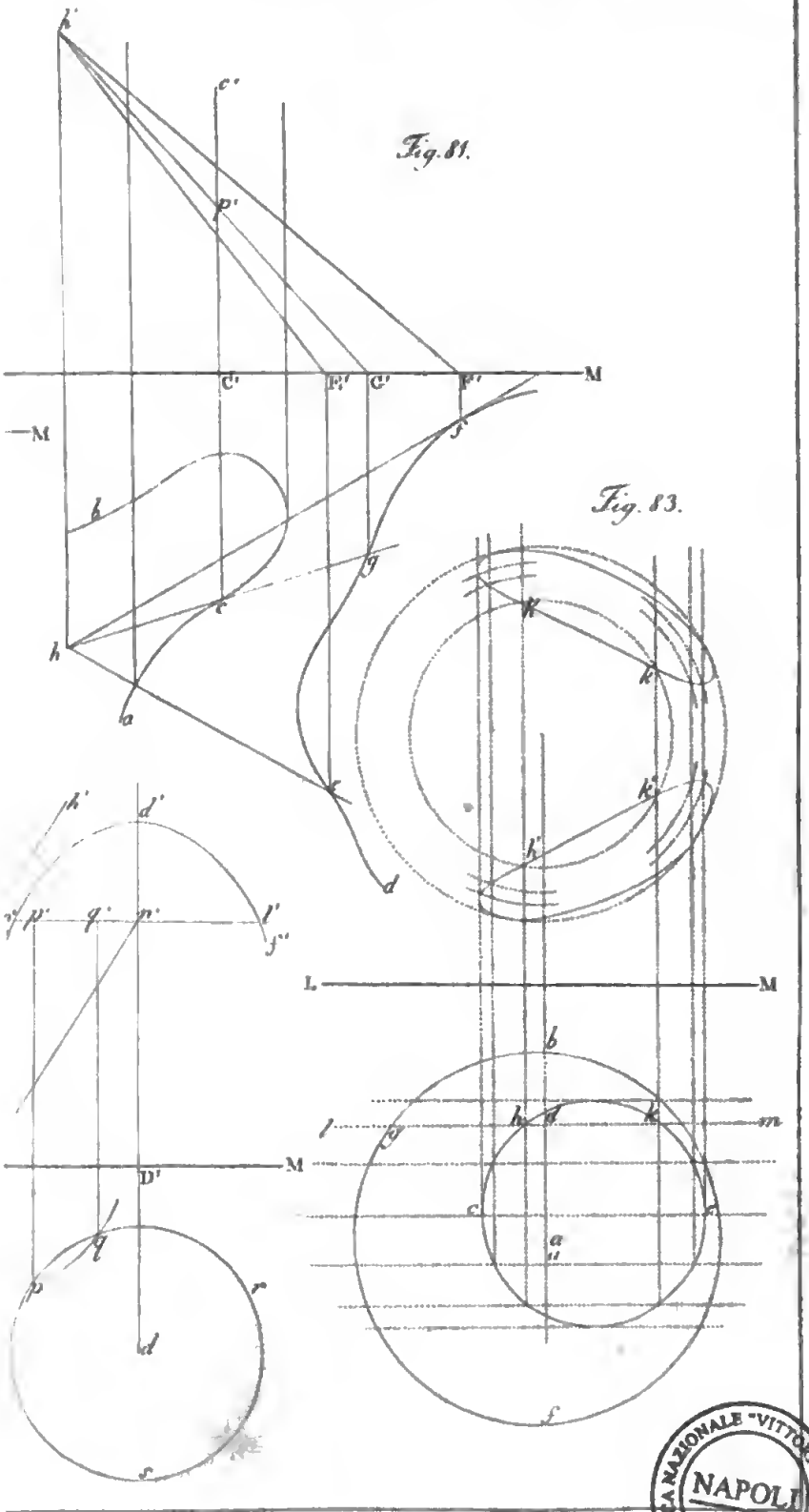


BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

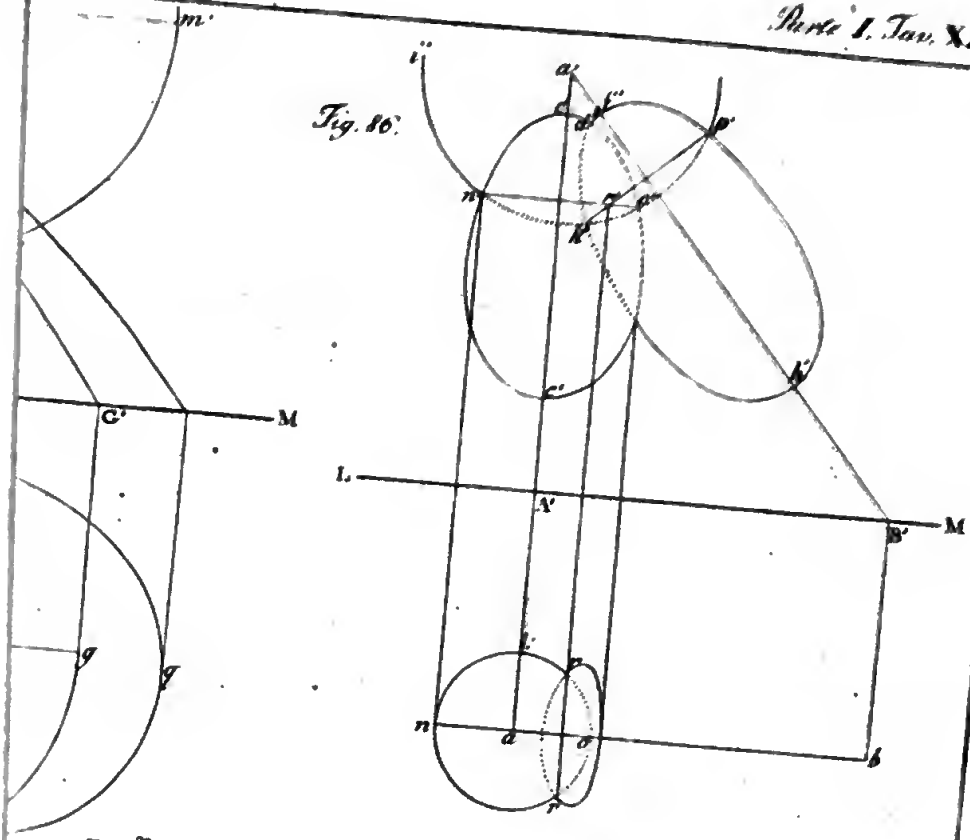


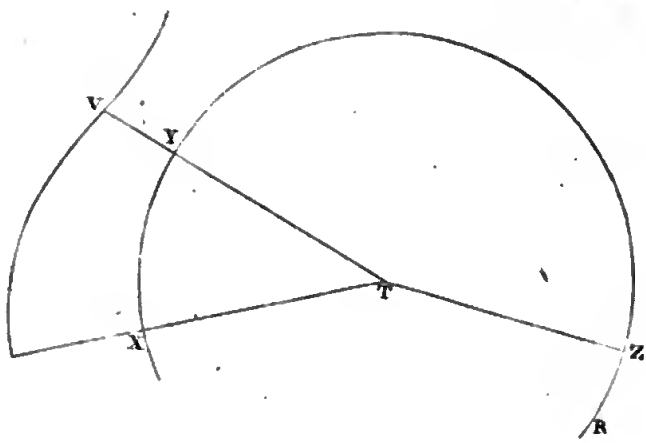
BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI





BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

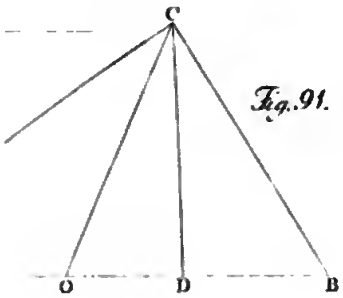


Fig. 91.

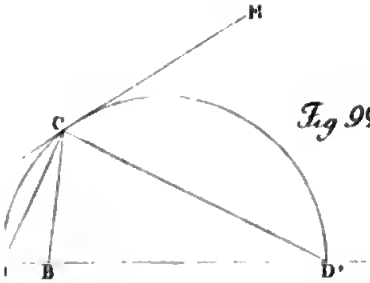


Fig. 92

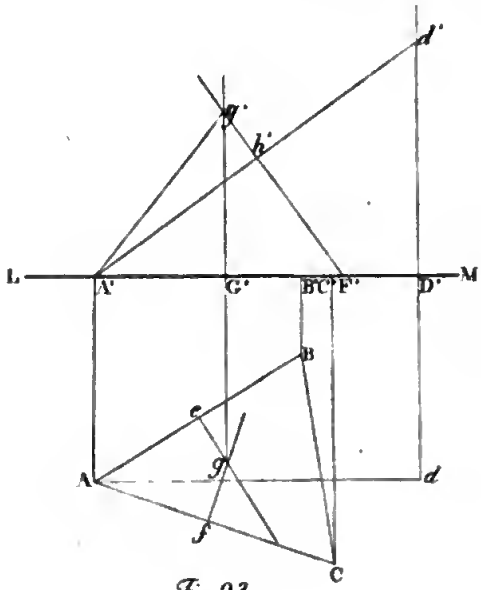


Fig. 93.

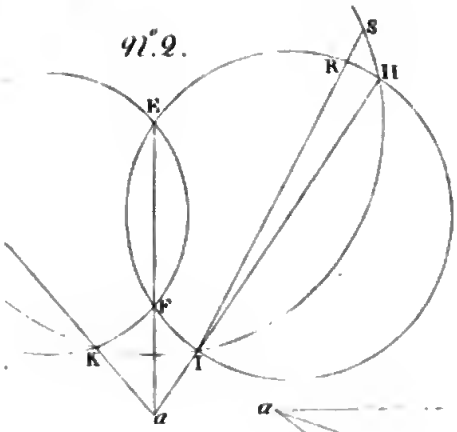


Fig. 96.

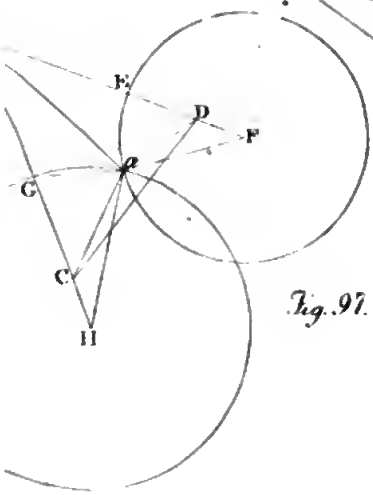
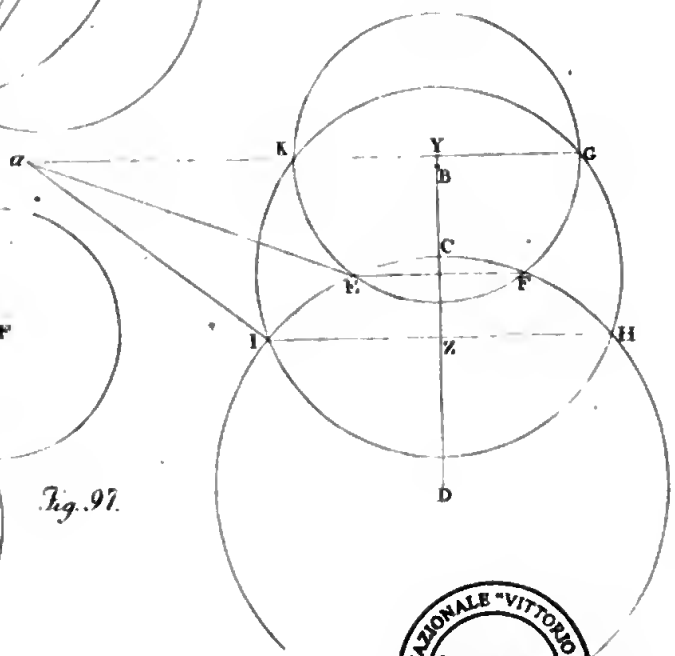


Fig. 97.



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

Digitized by Google

Fig. 102.

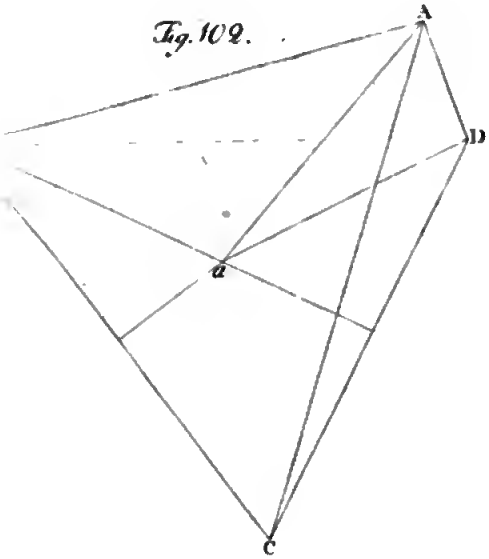
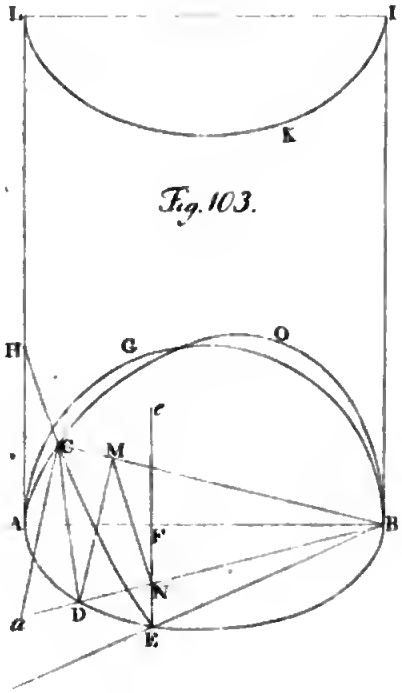
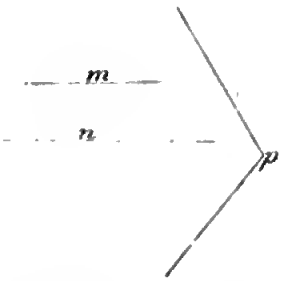


Fig. 103.





7. Fig. 108.

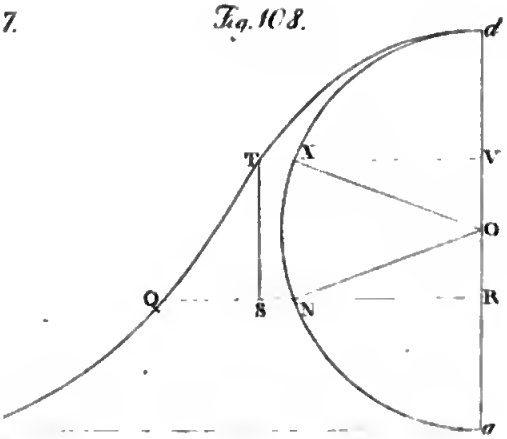
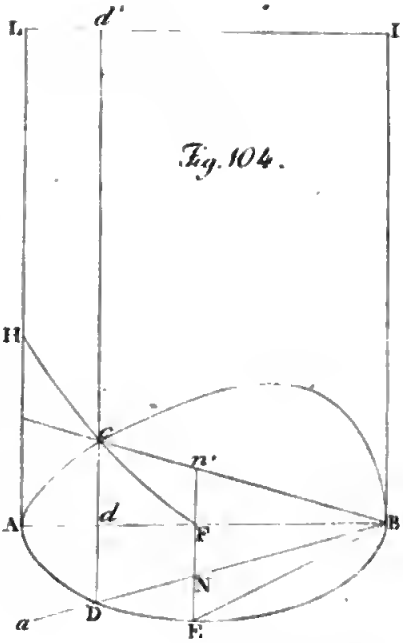


Fig. 104.



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google

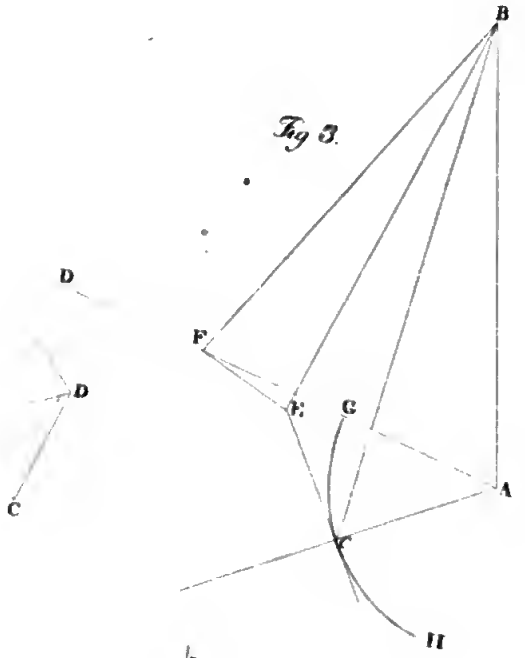


Fig 3.

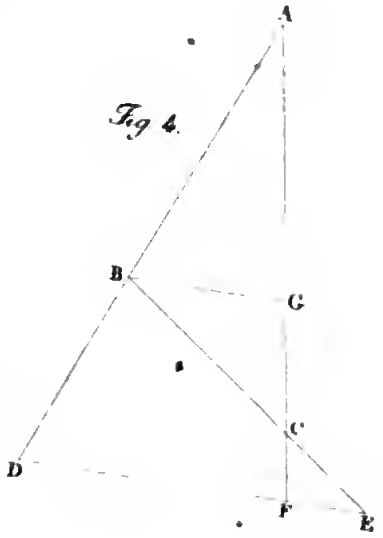


Fig 4.

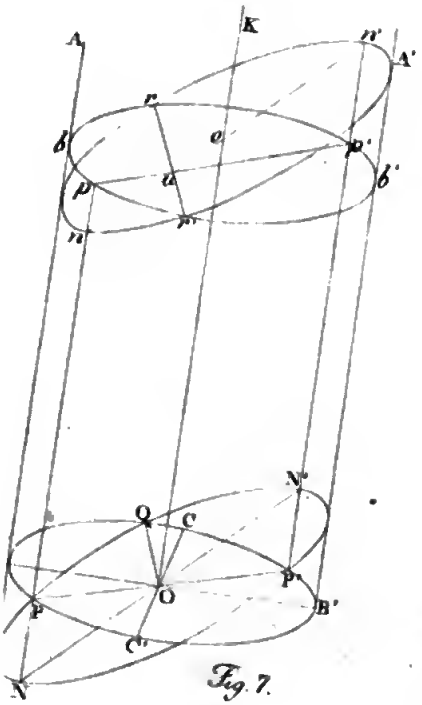


Fig. 7.

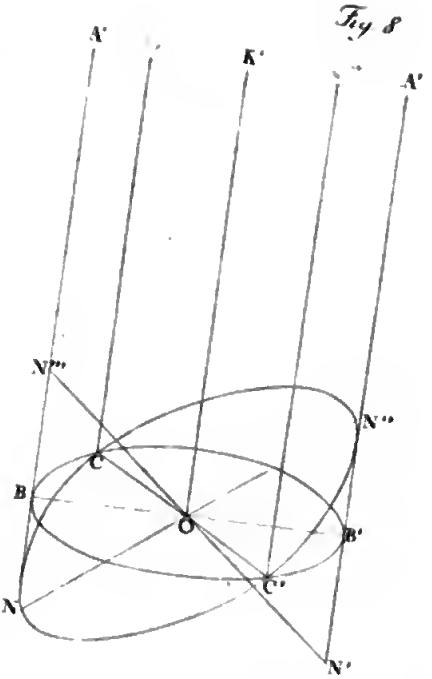


Fig 8

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

Fig. 11.

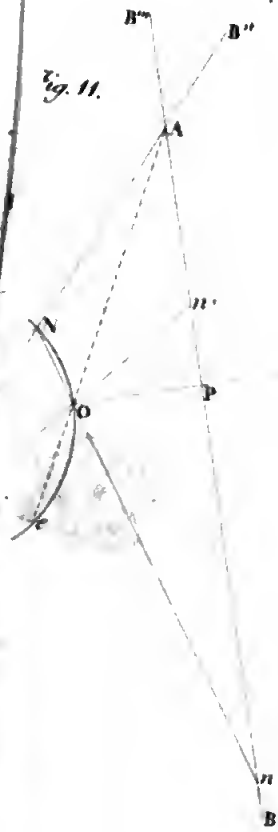


Fig. 12.

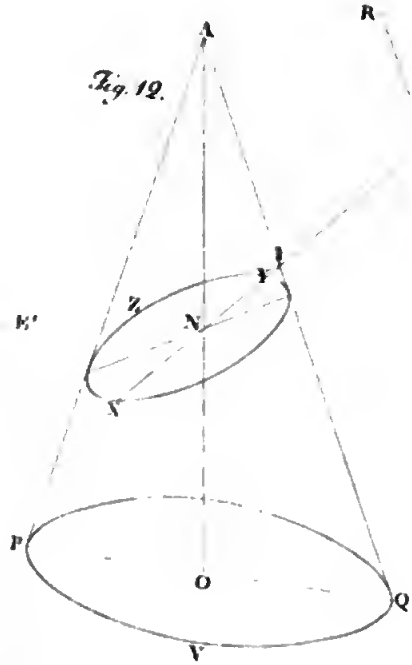


Fig. 16.

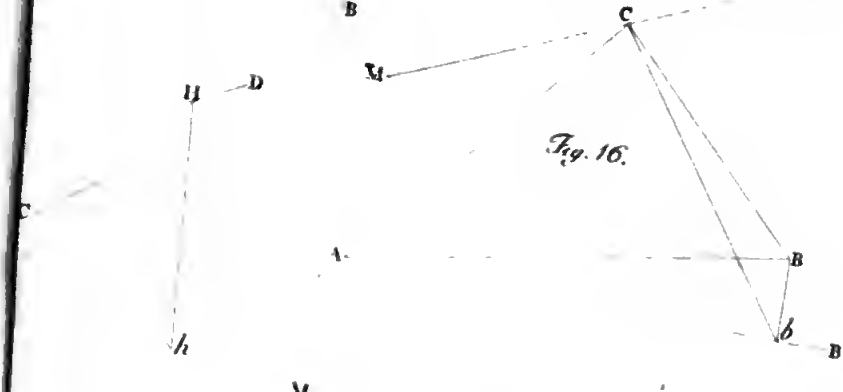
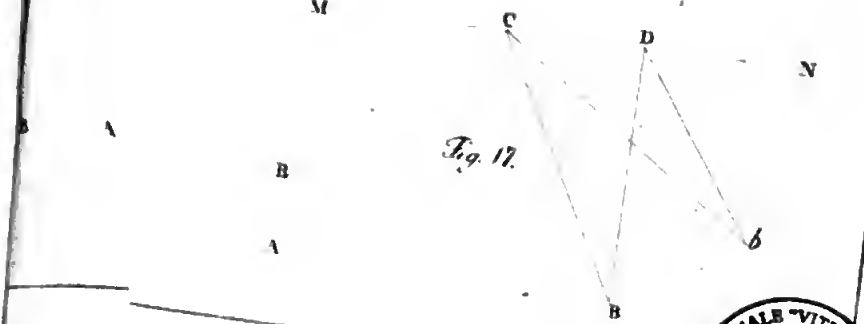


Fig. 17.



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google